Om

Udstrømning af Varme

fra

Ledninger for varmt Vand.

Af

A. Colding.

Naar man lader en constant Strøm af varmt Vand vedblivende flyde igjennem en Vandledning, saa vil Temperaturen i ethvert Punkt af Ledningen hurtig antage en permanent Tilstand, saafremt Vandet stadigt indtræder i Ledningen med samme Temperatur og Ledningen forøvrigt befinder sig under uforandrede Temperatur- og Afkjølingsforhold i hele dens Udstrækning; thi da vil det Tidspunkt snart komme, da Varmetilgang og Varmeafgang for ethvert Punkt af Ledningen vil holde hinanden i Ligevægt. Naar man arbeider med en Ledning, som har et constant Tværsnitsareal, saa bevæger Strømmen sig altsaa med en constant Hastighed igjennem samme, og da der udstrømmer Varme fra alle Punkter efter hele Ledningens Længde, saa er det klart, at Temperaturen maa aftage langs ad Ledningen fra Begyndelsen til Enden, samt at man let ved Forsøg maa kunne bestemme Størrelsen af den Varmemængde, som i et vilkaarligt Punkt af Ledningen udstrømmer igjennem en Overflade-Eenhed. Fæste vi nemlig Tanken paa en Vanddeel, som i et vist Øieblik træder ind i Ledningen med en given Varmemængde, saa vil denne Vanddeel i ligestore Tider gjennemløbe ligestore Længder af Ledningen, da Vandstrømmens Hastighed er constant; og naar vi derhos antage, at Temperaturtilstanden for alle Punkter af Ledningen er permanent, saa maa den betragtede Vanddeel ankomme til ethvert Punkt af Ledningen med den Temperatur, som Ledningen har i dette Punkt. Men deraf følger, at den Varmemængde, som udstrømmer fra Ledningen imellem tvende vilkaarlige Tværsnit paa samme, nøiagtig er ligestor med den, som Vandstrømmen taber paa sin Vei fra det ene Profil til det andet. Den tabte Varmemængdes Størrelse maa altsaa kunne bestemmes ved Hjælp af en Række af Metalrør, indskruede langs ad Ledningen saaledes, at den Metalbund, hvormed ethvert af disse Rør er forsynet, gaaer saa dybt ned i Ledningen, at hele den nederste Deel af dette Maalerør, hvori man kan fylde Qviksølv, naar Temperaturen ikke er for høi, eller en let smeltelig Metalcomposition, hvis Temperaturen er for høi for Qviksølv, er heelt omgivet af den varme Vandstrøm; thi da behøver man blot at nedsætte et Thermometer i Maalerøret for at bestemme Vandets Temperatur. Naar man paa denne Maade har bestemt Strømmens Varmegrad for et tilstrækkeligt Antal Punkter af Ledningen, vil det være let at construere en Curve, hvis Ordinater fremstille Strømmens Temperatur for et vilkaarligt Punkt af Ledningen, hvis Afstand fra Indløbet er $= x$ og denne Curve vil da ligefrem angive Temperaturen u som Function af x. Betegne vi denne Function ved f, saa have vi altsaa:

$$u = f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Men da Vandet strømmer igjennem Ledningen med en constant Hastighed V, saa vil Tiden

t, (Afkjølningstiden), som medgaaer, før den betragtede Vanddeel har gjennemløbet Veien x, være bestemt ved Ligningen

$$x = V \,.\, t, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

og indsætte vi denne Værdi for x i Formlen (1), saa finde vi Temperaturen af den betragtede Vanddeel, efter Forløbet af Tiden t, udtrykt ved:

$$u = f(V \,.\, t), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

hvoraf sees, at Functionen f, der fremstiller Loven for Varmens Aftagelse langs ad Ledningen, ogsaa fremstiller Loven for Temperaturaftagelsen med Tiden, saa at Forsøg i den antydede Retning maae kunne tjene til at bestemme den meget vigtige, men langt fra tilstrækkeligt kjendte Function f med en forholdsviis stor Grad af Nøiagtighed.

Naar Temperaturen af Vandet, som befinder sig i et givet Tværsnit paa Ledningen, er bekjendt, saa er den Varmemængde $M_{(u)}$, som Vandet indeholder, ligeledes bekjendt, og Varmetabet, fra det Punkt af Ledningen, hvis Afstand $= x_1$ og hvis Temperatur $= u_1$, til et følgende Punkt, hvis Afstand $= x$ og hvis Temperatur er $= u$, vil navnlig være fremstillet ved Formlen:

$$(M_{(u_1)} - M_{(u)}) = a \,.\, \varrho \,.\, w\,(f(x_1) - f(x)) = a\varrho w\,(f(V \,.\, t_1) - f(V \,.\, t)) \quad \ldots \quad (4)$$

hvis vi ved a betegne Ledningens samt Strømmens Tværsnitsareal og ved ϱ og w betegne Tætheden og den specifiske Varme af Vandet eller overhovedet af den circulerende Vædske.

Heraf finde vi Varmetabet i det Punkt af Ledningen, hvis Afstand er $= x$, for en Længde $= dx$, ved at sætte $x_1 = x - dx$, at være:

$$(M_{(u_1)} - M_{(u)}) = \frac{dM_{(u)}}{dx}\,dx = -\,a\varrho w f^1{}_{(x)dx}$$

og altsaa Varmetabet for en Længde-Eenhed:

$$\frac{dM_{(u)}}{dx} = -\,a\varrho w \,.\, f^1{}_{(x)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

og paa samme Maade Varmetabet i dette Punkt for en Tids-Eenhed, ved at sætte $t_1 = t - dt$ og $(M_{(n_1)} - M_{(u)}) = \frac{dM_{(u)}}{dt}dt$, at være:

$$\frac{dM_{(u)}}{dt} = -\,a\varrho w \,.\, V \,.\, f^1(V \,.\, t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6).$$

I Overeensstemmelse med den ovenfor angivne Tanke har jeg udført en Deel Forsøg over Varme-Udstrømningen fra cylindriske Ledninger; men før jeg gaaer over til at meddele disse, vil jeg opskrive følgende tre almindelige Hovedformler for Varmens Bevægelse i faste eller flydende Legemer, som ere fremstillede af Poisson i hans Théorie mathématique de la chaleur:

Formlen for Varmens Bevægelse i et hvilketsomhelst Legeme er:

$$v \,.\, \varrho w = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (A).$$

Formlen for Varmens Bevægelse i en lang tynd prismatisk eller cylindrisk Stang eller Rør: $$v = \frac{k}{\varrho w}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h \, . \, p}{a \, . \, \varrho w}(u - \theta_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (B)$$
og Udtrykket for Varmestrømmen:
$$\Gamma = -k \, . \, \frac{du}{d\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (C)$$
hvor u betegner Temperaturen efter Forløbet af Tiden t for det betragtede Punkt, hvis Coordinater ere x, y og z; ϱ og w betegne Tætheden og den specifiske Varme af Legemet i dette Punkt; k Legemets Varmeledningsevne; h dets Overflades Varmeudstraaleevne; a, p og θ_0 den prismatiske eller cylindriske Stangs Tværsnitsareal og Perimeter samt det omgivende Mediums Temperatur; v Hastigheden, hvormed Varmen bevæger sig, hvilken i Almindelighed kan fremstilles: $v = \frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dt}\frac{du}{dz}$, og endelig Γ betegner Varmestrømmen eller den Varmemængde, som i Eenhed af Tid strømmer igjennem Eenhed af Overflade i det Punkt, hvis Coordinater ere x, y og z, og hvori du er Temperaturdifferentsen paa Afstanden $d\lambda$ i Varmestrømmens Retning.

Men disse Formler for Varmens Bevægelse i et Legeme forudsætte som bekjendt, at Legemets Varmeledningsevne k, — den Varmemængde, der, pr. □ Eenhed og pr. Tids-Eenhed, strømmer igjennem et Lag af Tykkelse = 1, naar Temperaturdifferentsen i Lagets Sideflader, = 1 Grad, — er constant, og at Varmestrømmen er ligefrem proportional med den Temperatur, der udgjør Forskjellen mellem Varmegraden af det Legeme, som afgiver, og det, som modtager Varmen. Da nu denne Forudsætning, efter de bekjendte Forsøg af Dulong og Petit, i Almindelighed skal være urigtig, vil det maaskee være Umagen værd, saavidt muligt, at jevnføre Formlerne (A), (B) og (C) med Resultaterne af Forsøgene for at erholde Kundskab om disse Formlers Grad af Paalidelighed.

Betragte vi den almindelige Ligning (A) og antage derhos, at saa lang en Tid er forløben, at Varmen er kommen i en permanent Tilstand for alle Punkter af den betragtede Masse, samt at Massen er fast og saaledes beliggende, at der kun kan finde Varmeudstrømning Sted i een Retning, og navnlig i Retning af x Axen, saa er det aabenbart, at:
$$\frac{du}{dt} = 0, \ \frac{du}{dy} = 0, \text{ og } \frac{du}{dz} = 0,$$
og i saadant Tilfælde reducerer Formlen (A) sig til følgende:
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \text{ hvoraf } u = A + B \, . \, x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$
idet A og B ere Constanter. Temperaturen i Retning af x Axen skal altsaa ifølge Formlen (A) være jevnt aftagende, naar vi gaae ud fra Varmekilden, svarende til $x = 0$, og dette theoretiske Resultat har jeg havt Leilighed til at underkaste en Række af Forsøg, som har stadfæstet det. Der findes nemlig paa Vandværket 6 Stkr. corniske Dampkjedler, hver af 30 Fods Længde og $5\frac{1}{2}$ Fods udvendig Diameter; de ere alle indmurede Side om Side med

hverandre, saa at Muurværket, der omfatter alle 6 Kjedler, danner een heel sammenhængende Blok. Af disse Kjedler havde 3de, ved Siden af hinanden liggende, været i stadig Brug i lang Tid, og da alle 3 Kjedler ere forbundne med et stort fælleds Damprør, saa er Dampspændingen og følgelig ogsaa Temperaturen i alle tre Kjedler stedse ligestor, og da Dampspændingen tilmed stedse meget nær er constant — 39 à 40 ℔ pr. □ Tomme —, idet Kjedlerne ere meget store i Forhold til Dampforbruget, og da Fyringen foregaaer med megen Omhyggelighed, saa vil det være indlysende, at den mellemste af de tre Kjedler stedse modtager ligesaa megen Varme fra de to ved Siden af denne liggende Dampkjedler, som den udsender til disse og at der fra den midterste af de nævnte Kjedler altsaa væsentligt kun udstrømmer Varme opad og, om man vil, nedad, naturligviis dog under Forudsætning af, at man ikke gaaer for nær til Kjedlens Endeflader, der dog ogsaa ligge indmurede. For at forhindre Varme-Udstrømningen opad, ere alle Kjedlerne dækkede med et Sandlag af c. 12 Tom. Tykkelse, der i høi Grad svarer til sin Hensigt.

Til at maale Temperaturen af dette Sandlag i forskjellige Dybder under Overfladen af Laget benyttede jeg det samme Thermometer, som jeg har benyttet ved alle de andre Forsøg, som jeg senere skal anføre. Det bestod af en cylindrisk Qviksølvbeholder af $17{,}5^{mm}$ Længde og $7{,}5^{mm}$ Diameter, hvis Rørstilk var indsmeltet i et ydre Glasrør af 12^{mm} Diameter, hvori var indsat en fast, i hele Grader efter Celsius, inddeelt Scala, hvorpaa 100° C. indtog en Længde af 133^{mm} og som i det Hele var udstrakt fra ÷ 27° til + 168° Celsius. Ved at nedsætte dette Therometer i en Blanding af nyfalden Snee og Vand viste det + 0,2° C.; en Feil, som dog ikke har videre Indflydelse her, da alle Forsøg ere udførte med det samme Instrument, som velvilligt var mig laant af den polytechniske Læreanstalts physiske Samling.

Da Spændingen af Dampen i Kjedlerne, som alt nævnt, varierede mellem 39 og 40 ℔ pr. □ Tom., varierede følgelig Temperaturen i Kjedlerne fra 131 til 134° C., hvorimod Temperaturen i Kjedelhuset under Forsøget, som jeg nu skal omtale, var 16,8° C. Paa det Sted, hvor Observationen over Temperaturaftagelsen i Sandet udførtes, havde Sandlaget en Tykkelse over Overkanten eller Toppen af Kjedlen af 294^{mm}. Ved at stikke Termometrets Qviksølvbeholder ned lige under det øverste Sandlag og lade det henligge roligt fandtes Temperaturen af Sandet i en Afstand af 285^{mm} fra Varmekilden = 29°; alle de øvrige Temperaturer bleve derimod bestemte ved at stikke Thermometret lodret ned i Sandet indtil Afstanden imellem Kjedeloverfladen og Underkanten af Thermometret var den, som findes anført i efterfølgende Tabel.

Observation over Temperaturen af Sandbadet i bestemte Afstande fra Dampkjedlen.

Afstand fra Kjedlen . .	285^{mm}	228	202	176	124	98	72	46	20	0^{mm}
Temperaturen	29,0°	48,0°	57,0°	66,3°	83,0°	93,0°	104,0°	114,2°	124,2°	133,0° C.
Beregnet Afstand x . .	280^{mm}	228	203	177	131	104	73	45	18	÷ 7^{mm}

Afsætte vi de forskjellige Afstande som Abscisser og de tilsvarende Temperaturer som Ordinater til en Curve, saa sees det strax, at Curven er en ret Linie, og naar de forskjellige sammenhørende Temperaturer og Afstande fra Varmekilden indsættes i Formlen (7) istedetfor u og x, saa findes ved Anvendelse af den approximerte mindste Qvadratmethode:

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{Temperaturen i Celsius Grader}) & u = 130{,}5 \div 0{,}3626\ x \\ (\text{Afstanden i Millimetre}) & x = 360 \div 2{,}758\ u\end{array}\right\} \dots\dots\dots (8)$$

Ved Hjælp af den sidste Formel er den 3die horizontale Række af Værdier for x beregnet, og af Overeensstemmelsen imellem de beregnede og de observerede Værdier for Afstanden x fremgaaer tydeligt, at den af den almindelige Ligning for Varmens Bevægelse afledte Formel (B) maa betragtes som fremstillende Loven for Varmens Aftagelse med Afstanden fra Varmekilden. — Temperaturen i Toppen af Sandlaget findes, ved i (8) at sætte $x = 294^{mm}$, at være $u = 23{,}9^\circ$, som saaledes kun overstiger Lufttemperaturen med 7,1° C. Ville vi udtrykke Dybden x i Fod, istedetfor i Millimetre, saa maa vi multiplicere Coefficienten for x i den første Formel (8) med 314, som er Antallet af Millimetre paa en Fods Længde; derved erholdes:

$$u = 130{,}5 - 113{,}9\,.\,x,$$

hvoraf vi finde $\frac{du}{dx} = -113{,}9$, som indsat i Formlen (C) giver Varmestrømmen pr. □ Fod.

$$\Gamma = 113{,}9\,.\,k,$$

der er uafhængig af x og altsaa ligestor i alle Afstande fra Varmekilden.

Antage vi, i Henhold til Ångströms Forsøg med leerholdigt Sand, Pogg. Ann. Band CXIV. p. 529, at et Sandlag af 1 Centimeters Tykkelse ved en Differentstemperatur af 1° C. gjennemstrømmes pr. Minut af saamegen Varme, som behøves for at opvarme et Vandlag af $2{,}05^{mm}$ Tykkelse 1° C., saa vil den Varmemængde, som i samme Tid og ved samme Temperaturdifferents gjennemstrømmer et Sandlag af 1 Fods Tykkelse, være istand til at opvarme et Vandlag af 0,000208 Fods Tykkelse 1° C. Den Varmemængde k, som ved en Tykkelse af 1 Fod og en Temperaturdifferents af 1° C. strømmer igjennem en □ Fod af Sandlaget, er altsaa lig den, som kan opvarme 0,000208 Cbfd. Vand 1° eller som kan opvarme 0,0129 ℔ Vand 1° Celsius, og den Varmemængde, som udstrømmer fra hver Qvadratfod Overflade over Kjedlen, under de betragtede Forhold, vil følgelig være istand til pr. Minut at opvarme 1,5 ℔ Vand 1° C.

Det her anførte Forsøg giver saaledes en Bekræftelse paa Rigtigheden af den almindelige Formel (A), idet Forsøget viser, at den fundamentale Hypothese, hvorpaa den er bygget, nemlig at Varmestrømmen staaer i directe Forhold til Temperaturdifferentsen og i omvendt Forhold til det af Varmen gjennemstrømmede Lags Tykkelse, her viser sig stemmende med Erfaring for alle Temperaturer lige op til 133° og sandsynlig endnu ved langt høiere Varmegrader.

Vi ville derpaa gaae over til at undersøge Varmens Bevægelse i en cylindrisk Ledning med smaa transversale Dimensioner, naar vi forudsætte, at den Poissonske Formel (B) er correct.

Tage vi et vilkaarligt Punkt af Axen som Coordinaternes Begyndelsespunkt og betragte Cylinderens Axe som x Axen, saa have vi, ifølge (B), naar vi betragte et fast Legeme,

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= K\,.\,\frac{d^2u}{dx^2} - H\,.\,(u - \theta_0) \\ \text{idet } K &= \frac{k}{\varrho w} \text{ og } H = \frac{hp}{a\varrho w} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Men er det derimod en flydende Masse, f. Ex. en Vandstrøm, som bevæger sig i Retning af x Axen, saa er Coordinaten til en vilkaarlig Deel af Strømmen (x) en Function af Tiden, og i dette Tilfælde maae vi derfor istedetfor Hastigheden v, hvormed Varmen bevæger sig, sætte: $\frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx}$, og Ligningen for Varmens Bevægelse bliver altsaa følgende:

$$\frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} = K\frac{d^2u}{dx^2} - H(u - \theta_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Tænke vi os dernæst, at saa lang en Tid er forløben, at Temperaturen er bleven permanent og følgelig kun afhænger af x, og antage vi tilmed, at Vandstrømmens Hastighed $\frac{dx}{dt} = V$ er constant, saa have vi $\frac{du}{dt} = 0$ og altsaa:

$$K\,.\,\frac{d^2u}{dx^2} = V\frac{du}{dx} + H(u - \theta_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

For at integrere denne Ligning sætte vi:

$$u - \theta_0 = e^{mx}, \quad \frac{du}{dx} = m\,.\,e^{mx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = m^2\,.\,e^{mx},$$

og erholde derved følgende Betingelsesligning:

$$m^2 = \frac{V}{K}m + \frac{H}{K},$$

hvis to Rødder, betegnede ved $-m_0$ og $+m_1$, kunne fremstilles saaledes:

$$(-m_0) = -\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2K}\right)^2 + \frac{H}{K}} - \left(\frac{V}{2K}\right)\right] \text{ og } m_1 = \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2K}\right)^2 + \frac{H}{K}} + \left(\frac{V}{2K}\right)\right],$$

hvor m_0 og m_1 begge ere positive Størrelser, hvorefter det fuldstændige Integral af (11) kan skrives:

$$u - \theta_0 = Ae^{-m_0x} + Be^{m_1x}.$$

Men antage vi nu, at for $x = 0$ er $u = u_0$, og at til $x = \infty$ svarer $u = \theta_0$, saa finde vi:

$$B = 0 \text{ og } A = u_0 - \theta_0$$

og følgelig erholde vi, naar Værdierne for H og K indsættes,

$$\left.\begin{aligned} u - \theta_0 &= (u_0 - \theta_0)e^{-m_0\,.\,x}, \\ \text{idet} \quad m_0 &= \sqrt{\left(\frac{V\varrho w}{2k}\right)^2 + \frac{hp}{ak}} - \left(\frac{V\varrho w}{2k}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Dersom vi altsaa lade en constant Strøm af varmt Vand bevæge sig igjennem et Rør af tilstrækkelig stor Længde og, efterat Temperaturtilstanden for hele Ledningen er bleven permanent, observere Vandtemperaturen svarende til forskjellige Afstande x fra Indløbet, saa vil Temperaturen aftage langs ad Ledningen ifølge den Lov, som er fremstillet ved Ligningen (12), saafremt den Poissonske Grundformel (B) virkelig er correct, men ogsaa kun da.

Den Første, der søgte at fremstille Loven for Afkjølingen eller for Temperaturens Aftagelse efterhaanden, som Afkjølingstiden voxer, var den berømte Newton, der ved Forsøg fandt, at Afkjølingshastigheden stedse var proportional med Differentsen imellem den afkjølende Vædskes og den omgivende Lufts Varmegrader eller, med andre Ord, at:

$$\frac{du}{dt} = -g_0(u - \theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

hvor g_0 er en Constant; ved at integrere denne Ligning findes som bekjendt:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-g_0 t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

der ganske falder sammen med Formlen (12), naar vi sætte $g_0 = m_0 V$.

En Stadfæstelse af Formlen (12) vilde altsaa være en Stadfæstelse af den bekjendte Newtonske Lov for Varmens Udstrømning, og dobbelt interessant vilde det være, hvis det maatte vise sig, at Erfaring bekræftede den simple Newtonske Lov, da man derved tillige vilde faae en Bekræftelse paa den vigtige Formel (B), der saa ofte anvendes i Praxis, men som aabenbart er urigtig i alle Tilfælde, hvor Newtons Formel er forkastelig.

Den simple og for Anvendelse særdeles beqvemme Newtonske Lov, er nemlig, som bekjendt, siden Aaret 1818, da Dulong og Petit udførte deres bekjendte Forsøg og skrev deres berømte Afhandling over Lovene for Varmens Forplantelse, der vandt Pariser Academiets Priisbelønning, bleven stillet saaledes i Skygge, at man næsten har maattet opgive den heelt, og i det Høieste tør anvende den i de Tilfælde, hvor Differentstemperaturen er ganske lille og Temperaturen i det Hele kun er lidet variabel; thi kun i dette Tilfælde stemmer den Newtonske Lov nogenlunde med Resultaterne af Dulongs og Petits Forsøg.

Dulong og Petit benyttede, som bekjendt, ved deres Forsøg en huul Kugel af Kobber af 30^{cm} Diameter, som blev nedsænket i et Kar med Vand, der under hver Række af Forsøg blev holdt paa samme Temperatur. Denne Kobberkugle var saaledes indrettet, at man i dens Centrum igjennem en fremstaaende Rand, der ragede op over Vandet udenom, kunde nedsænke en stor opvarmet Thermometerkugle af 3 til 6^{cm} Diameter, hvilken Kugel da efterhaanden afgav sin Varme til den omtalte Kobberkugle og derigjennem til Vandet udenom. Ved at observere den Temperatur, som bemeldte store Thermometer angav, til forskjellige Tider, bestemte Dulong og Petit Afkjølingshastigheden, og ved saadanne Forsøg fandt de blandt Andet, at naar Varmetabet pr. Minut ved en Differentstemperatur imellem det opvarmede Legeme og det omgivende Medium af 20° var 0,71°, saa var Varmetabet ikke, i Overeensstemmelse med den Newtonske Lov,

lig 2 . 0,71 eller 1,42°, men derimod 1,60° ved en Diff.-Temp. af 40°
ikke lig 3 . 0,71 — 2,13°, — 2,61° — — - 60°

ikke lig	4 . 0,71	eller	2,84°,	men derimod	3,77°	ved en Diff.-Temp.	af 80°
—	5 . 0,71	—	3,55°,	—	4,99°	— —	- 100°
—	6 . 0,71	—	4,26°,	—	6,46°	— —	- 120°
—	7 . 0,61	—	4,97°,	—	8,05°	— —	- 140°
—	8 . 0,71	—	5,68°,	—	9,85°	— —	- 160° o. s. v.,

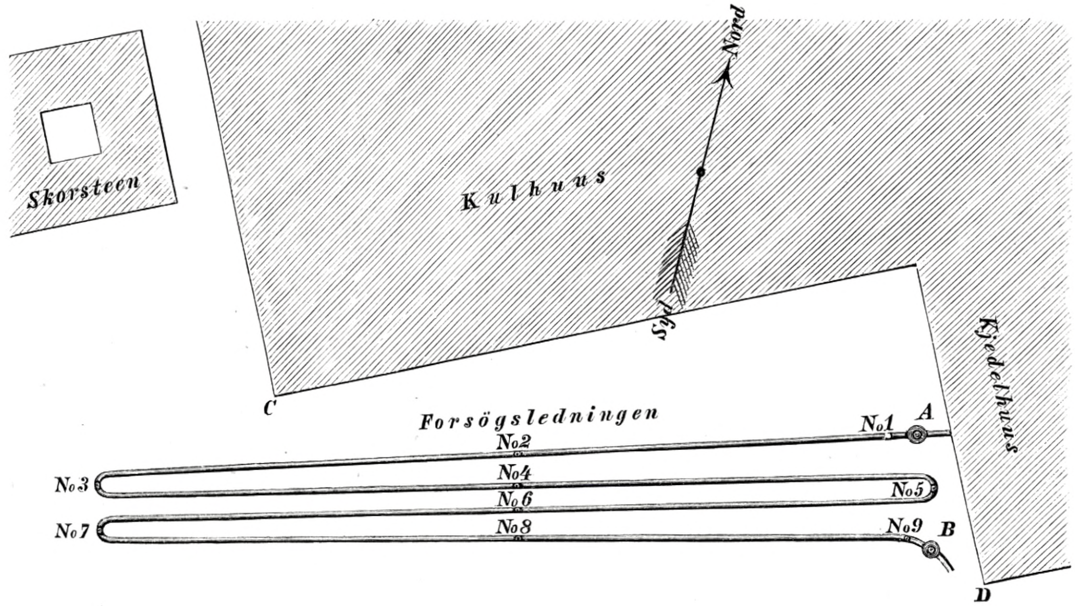
kort sagt, de fandt Varmetabet stigende i et andet og stærkere Forhold end Newton havde fundet; hvortil kom, at deres Forsøg viste, at Varmetabet ikke blot afhang af Differentstemperaturen $(u - \theta_0)$, men tillige af Lufttemperaturen θ_0, og navnlig saaledes, at Varmetabet voxede med θ_0. Ved Dulongs og Petits Undersøgelser ere vi altsaa førte bort fra den simple Newtonske Lov og have i dens Sted faaet en anden, mere sammensat, men næppe mindre tvivlsom Formel, som tilmed er vanskelig at benytte. Ganske utvivlsomt er det derimod, at vor Kundskab til Varmens Bevægelse i Legemerne endnu bestandigt er i høi Grad mangelfuld og ufuldkommen. Man kjender næsten intet til den stedfindende Varmefordeling under Varmestrømningerne, lidet til Legemernes Varmeledningsevne og mindre til deres Varmeudstrømningsevne. Man hjælper sig saa godt man kan i forekommende practiske Tilfælde. Naar der kun er Spørgsmaal om Varmestrømningerne ved lavere Temperaturer, saa benytter man i Reglen den Newtonske Formel og nøies med den Nøiagtighed, som denne giver; er der derimod Spørgsmaal om Varmestrømningerne ved høiere Varmegrader, saa benytter man saa vidt muligt Dulongs og Petits Formler, men stoler i Reglen kun lidt paa Resultatet.

Under saadanne tvivlsomme Forhold fandt jeg mig opfordret til at foretage nogle Rækker af Forsøg efter det Princip, som jeg foran har udviklet, og Resultatet af disse Forsøg forekommer mig at være saa tilfredsstillende, at jeg har troet at burde meddele det her.

Jeg skal først beskrive mit Apparat og Fremgangsmaaden ved de Forsøg, som jeg dermed har udført over Varmeudstrømningen fra en horizontalt liggende Varmvandsledning af Jern.

Den omhandlede Ledning, som bestod af trukne Smedejernsrør af 1 engelsk Tomme i indvendig Diameter, blev sammenskruet ved Hjælp af Muffer paa sædvanlig Maade og henlagt langs Sydsiden af Vandværksbygningerne paa Træbukke, i en Høide af 2 til 3½ Fod over Jorden, saaledes som nærmere er angivet i den vedføiede Skitse Fig. 1. Fra Punktet A, hvor en Aflukningshane var anbragt, blev en Ledning af halvtommige Rør ført ind i Kjedelhuset og sat i Forbindelse med Bunden af en i Brug værende Dampkjedel, hvorfra det varme Vand blev indledet i Forsøgsledningen, naar Hanen A tilligemed en paa selve Dampkjedlen anbragt Hane bleve aabnede. Det varme Vand fra Kjedlen gjennemstrømmede da Ledningen og forlod denne ved B, hvor atter en Aflukningshane var anbragt, ved hvis Hjælp man stedse kunde holde Forsøgsledningen fyldt med Vand og dog formindske Strømmen saameget man ønskede. Dampkjedlen, som havde 30 Fods Længde og 5½ Fods Diameter, indeholdt saameget Vand, at den Strøm, hvorom der her kunde blive Spørgsmaal, stedse var

Fig. 1.



forsvindende derimod, og Temperaturen i Kjedlen led derfor ingen kjendelig Forandring ved den heromhandlede Vandstrøm igjennem Forsøgsledningen. — Ved de 9 forskjellige Punkter paa Ledningen, som ere antydede ved Tallene Nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9, vare Rørene samlede ved Hjælp af Muffestykker, der havde Form af et **T**, og i ethvert af disse **T** Stykker var der atter indskruet et halvtommigt Smedejernsrør af circa 4 Tommers Længde, hvilket var lukket forneden med en indskruet Jernprop, der tjente som Bund i den Ende af Maalerøret, som befandt sig inde i det varme Vand, der gjennemstrømmede Forsøgsledningen. Det omtalte **T** Muffestykke havde en Diameter af circa $1\frac{1}{4}$ Tom. engelsk Maal indvendig og en Længde af c. $2\frac{1}{2}$ Tom., og naar dette blev sammenskruet med Ledningen, blev der et Spillerum af c. $1\frac{1}{4}$ Tom. imellem de to indskruede Ender af Ledningen. Disse **T** Stykker, hvis Grene vendte opad, bleve altsaa hvert forsynede med et Maalerør af $\frac{1}{2}$ Tom. indvendig Diameter, som nedskruedes saa dybt, at dets Metalbund naaede Bunden af Muffen paa $\frac{1}{4}$ Tom. nær, hvorved altsaa den nederste Ende af Maalerøret, der var afdreiet til en udvendig Diameter af $^3/_4$ Tom. paa en Længde af 1 Tom, blev fuldstændig omgivet af det varme Vand, som gjennemstrømmede Ledningen. I alle disse 9 Stkr. Maalerør fyldte jeg Qviksølv, omtrent til en Høide af en Tomme over Bunden, og i dette Qviksølv, som var omgivet af det varme Vand, hvis Temperatur skulde bestemmes, behøvede jeg kun at nedsætte Thermometret, naar jeg vilde aflæse den søgte Vandtemperatur.

Længden af Ledningen fra Maalerøret	Nr. 1	til Do.	Nr. 2	var 24	Fod 9	Tom.
— — —	Nr. 2	—	Nr. 3	— 26	— 3	—
— — —	Nr. 3	—	Nr. 4	— 26	— 6	—
— — —	Nr. 4	—	Nr. 5	— 26	— 3	—
— — —	Nr. 5	—	Nr. 6	— 26	— 3	—
— — —	Nr. 6	—	Nr. 7	— 27	— 6	—
— — —	Nr. 7	—	Nr. 8	— 24	— 10	—
— — —	Nr. 8	—	Nr. 9	— 25	— 10	—

Den samlede Længde af Ledningen fra Nr. 1 til Nr. 9 var altsaa 208 Fod 2 Tom.

Tværsnitsarealet af denne Ledning, hvis indvendige Diameter var 1 engelsk Tomme, udtrykt i dansk Maal, var 0,0052 □ Fod og Ledningen, fyldt med Vand fra Maalerør Nr. 1 til Do. Nr. 9, indeholdt følgelig $0{,}0052 \times 208\frac{1}{6}$ eller 1,0824 Cubikfod Vand, og 6 Fods Længde af denne Ledning altsaa 1 Pot Vand. Ledningens ydre Diameter, afseet fra Mufferne, var 0,109 Fod og dens Omtræk eller Perimeter kan derefter sættes = 0,345 Fod, hvorefter Ledningens ydre Overflade pr. løbende Fod var = 0,345 □ Fod, dansk Maal. Med Hensyn til Vægten af denne 1 Tom. Jernledning bemærkes, at efter 2de Rør, hvis samlede Længde udgjorde 24 Fod 9 Tom. og hvis samlede Vægt var $41\frac{3}{4}$ ℔, har jeg anslaaet Vægten pr. løb. Fod til 1,687 ℔.

Vægten af den samlede Ledning fra Maalerør Nr. 1 til Nr. 9, foruden de 9 Stkr. løse Muffer, var herefter . . . . c. 351 ℔.
De 9 Stkr. Muffer, à $\frac{3}{4}$ ℔ pr. Stk. udgjorde . . . . c. 7 -

Hele Ledningen altsaa 358 ℔.

Antages Jernets specifiske Varme = 0,110, saa indeholdt altsaa Jernledningen en ligesaastor Varmemængde, som $0{,}110 \times 358 = 39{,}38$ ℔ Vand af samme Temperatur som det i Ledningen indeholdte Vand, og da hele Ledningen rummede 67,11 ℔ Vand, saa indeholdt selve Rørledningen en Varmemængde $= \frac{39{,}38}{67{,}11} = 0{,}587$ af den Varmemængde, som Vandet, der fyldte Ledningen, indeholdt.

Samtlige Rør, hvoraf Ledningen bestod, vare nye; Overfladen var i sin naturlige brune Tilstand, uden noget Overtræk, og i det Væsentlige ogsaa uden Rust.

Med denne Vandledning blev der foretaget forskjellige Rækker af Forsøg under forskjellig Vandføring og til forskjellige Tider samt under forskjellige Veirforhold, og Resultatet findes sammenstillet i den efterfølgende Tabel I.

Tabel I.

Forsøgets Nummer.	Forsøgets Dato og Tid.	Lufttemperatur.	Temperaturen i Maalerørene. Nr. 1.	2.	3	4.	5.	6.	7.	8.	9	Temperat. af det udstr. Vand.	Vandets Strømhast. pr. Sec.	Veirforholdene under Forsøgene.
													Fod.	
1	31. Januar 1862 Klokken 12—1½ Middag.	2,9°	105,3°	90,2°	71,2°	57,0°	46,9°	39,0°	31,8°	26,2°	22,0°		0,154	I. Graa Luft, lidt Luftning af Nordvest.
2			105,7	90,2	71,8	58,0	46,9	38,7	32,0	26,0	23,0		do.	
3			106,5	91,3	73,4	59,4	48,5	40,0	33,3	27,5	23,8		do.	
4			107,0	91,5	73,4	59,4	48,5	40,3	33,0	27,5	23,5		do.	
5			107,2	90,7	72,2	59,4	49,1	40,4	33,7	27,2	23,9		do.	
6		3,0	108,1	91,5	73,0	59,2	49,1	39,8	33,3	27,7	23,6		do.	
7	31. Januar 1862 Klokken 3½—5 Eftermiddag.	2,9	119,0	113,0	106,5	99,6	94,3	87,7	82,3	78,2	74,4	75,6°	0,482	II. Veiret omtrent som ovenfor.
8			117,0	111,5	105,0	100,0	92,1	87,0	83,9	78,0	74,0	75,0	do.	
9			115,4	109,9	104,0	98,1	91,0	86,0	82,3	77,0	73,0	73,0	do.	
10			115,6	110,4	103,9	98,6	91,6	86,1	83,0	77,6	73,5	74,0	do.	
11			118,0	112,0	105,5	99,0	92,2	86,0	82,0	77,0	72,5	74,0	do.	
12	1. Februar Klokken 10¼—12 Formiddag.	1,4	119,0	111,2	102,3	94,0	86,0	77,0	73,4	68,0	63,9	64,4	0,333	III. Graa Luft, Nordost Vind, næsten stille.
13			120,0	111,2	102,9	95,1	87,6	78,0	74,8	69,1	65,0	65,9	do.	
14			119,0	111,3	103,0	95,1	87,8	78,0	74,7	69,1	65,0	65,7	do.	
15			120,0	112,1	103,3	95,1	87,0	77,2	73,7	68,4	64,1	65,0	do.	
16			121,0	113,6	104,6	96,4	88,0	79,1	76,4	71,0	66,9	67,6	do.	
17			119,2	112,2	103,7	95,7	88,2	78,8	76,0	70,6	66,3	67,4	do.	
18	1. Februar Klokken 1¾—3¼ Eftermiddag.	1,8	121,0	118,2	113,9	109,0	103,9	100,0	97,0	94,0	91,0	92,5	0,957	IV. Veiret uforandret.
19			121,2	117,0	113,0	108,7	104,6	100,9	99,0	96,6	93,4	95,0	do.	
20			121,0	118,0	114,2	110,6	106,0	101,7	98,0	94,6	91,2	92,6	do.	
21			119,4	116,4	112,7	108,7	104,4	100,4	96,8	94,0	90,6	91,5	do.	
22		1,8	118,3	115,7	111,8	108,0	103,8	99,4	96,1	93,0	89,5	90,0	do.	
23	3. Febr. Kl. 1 25 M. Efterm.	÷1,3	120,3	116,0	111,5	107,0	103,0	97,3	94,1	91,7	87,7		0,608	V. Svagt Solskin, Norden Vind, næsten ganske stille.
24	3. Febr. Kl. 3 til 3 40 M.	+3,0	122,2	120,0	117,0	114,7	111,0	107,0	106,1	104,2	100,0		1,429	VI. Taage, Sønden Vind, lidt Luftning.
25			122,1	120,0	117,7	114,7	110,5	107,0	106,1	104,3	101,3		do.	
26			122,1	119,5	117,0	114,0	110,0	105,7	105,5	102,4	99,0		do.	
27	5. Februar Klokken 12—1¾ Middag.	0,5	123,5	119,2	116,5	112,3	110,5	108,1	106,1	103,5	100,7		1,636	VII. Graa Luft, Nordvest Vind, frisk Kuling med c. 30 Fods Hastighed pr. Sec.
28			125,0	123,8	119,4	116,0	—	110,5	107,5	106,0	101,0		do.	
29			122,5	121,5	118,7	116,0	112,3	110,6	108,5	106,5	104,0		do.	
30			124,0	121,3	118,0	115,0	112,3	108,5	106,0	104,3	102,0		do.	
31			122,6	121,8	118,4	115,5	112,3	109,4	108,0	104,0	101,4		do.	

Betragte vi de forskjellige Rækker af Forsøg, der svare til samme Vandføring og Strømhastighed og omtrent ere udførte til samme Tid og under de samme ydre Vind- og Veirforhold, saa viser det sig strax, at, ihvorvel der findes smaa Variationer af Temperaturerne i de enkelte Maalerør, saa stemme de dog i det Hele saa nøie overeens, at de enkelte Rækker af Forsøg saa at sige alle føre til eet Resultat, hvilket tilstrækkeligt viser, at Forsøgene ere paalidelige. Paa Grund heraf kunne vi indskrænke os til at tage Middeltallene for hvert enkelt Maalerør af de forskjellige Rækker af Forsøg, som svare til samme Vandføring og temmelig nær ere udførte under lige ydre Forhold. Gjøre vi dette og søge vi derefter Differentstemperaturen mellem Ledningens og Luftens Varme, saa komme vi til følgende Resultat:

Tabel II.

Forsøgene, hvoraf Middeltallet er taget.	Differentstemperaturen $(u - \theta_0)$ for de forskjellige Maalerør.								
	Nr. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Nr. 1 til 6	104	88	70	56	45	37	30	24	20
Nr. 7 til 11	114	108	102	96	89	84	80	75	70
Nr. 12 til 17	119	111	103	94	86	77	74	68	64
Nr. 18 til 22	118	115	111	107	103	98	95	92	89
Nr. 23	121	117	113	108	104	98	95	93	89
Nr. 24 til 26	119	117	114	112	107	104	103	101	97
Nr. 27 til 31	123	121	118	115	112	110	107	105	102

Bestemme vi Afstanden x fra Maalerøret Nr. 1 til ethvert af de følgende Maalerør, saa finde vi følgende Værdier for x at svare til de forskjellige Maalerør:

Maalerør:	Nr 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Afstanden x (i Fod)	0,00	24,75	51,00	77,50	103,75	130,00	157,50	182,33	208,17

Det kommer nu an paa at vise, om de her anførte Værdier af $(u - \theta_0)$ og de tilsvarende Værdier af x afhænge af hinanden efter den Lov, som er fremstillet i Formlen (12), idet m_0 er constant.

For at afgjøre dette Spørgsmaal, ville vi betragte enhver af de i foranstaaende Tabel II. angivne 7 horizontale Rækker af Værdier for $(u - \theta_0)$, der omtrent ere fundne under lige ydre Forhold, for sig. Sætte vi:

$$m = 0{,}43429448 \ldots \times m_0,$$

saa finde vi, naar log betegner den brigg. Logarithme, ifølge Formlen (12)

$$\log (u_0 - \theta_0) = \log (u - \theta_0) + m \cdot x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

og indsætte vi heri de forskjellige Værdier for $(u - \theta_0)$ af den første horizontale Række, som Tabel II indeholder, samt de tilsvarende Værdier for x, saa erholde vi følgende 9 Ligninger:

$$\left.\begin{aligned}
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}01703 + 0{,}00\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}94448 + 24{,}75\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}84510 + 51{,}00\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}74819 + 77{,}50\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}65321 + 103{,}75\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}56820 + 130{,}00\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}47712 + 157{,}50\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}38021 + 182{,}33\,.\,m \\
\log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}30103 + 208{,}17\,.\,m
\end{aligned}\right\}$$

som, paa Iagttagelsesfeilene nær, — derunder indbefattet de Forskjelligheder, som hidrøre fra Vindens ulige Virkning paa Apparatet, — alle skulle give een og samme Værdi for m, saafremt den Newtonske Lov er correct. Bestemme vi derfor Værdierne af m og log $(u_0 - \theta_0)$ ved Hjælp af den approximerede mindste Qvadratmethode, saa finde vi:

$$m = 0{,}003484 \text{ og } \log\,(u_0 - \theta_0) = 2{,}02134,$$

og naar vi derefter, ved Hjælp af Formlen (15), beregne de Værdier for $(u - \theta_0)$, der svare til de forskjellige Maalerør, og sammenstille Resultatet af Beregningen tilligemed de observerede Værdier af $(u - \theta_0)$ i efterstaaende Tabel, erholdes en klar Fremstilling af den Maade, hvorpaa den Newtonske Lov slutter sig til Forsøgene af den

I. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.	**6**.	**7**.	**8**.	**9**.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	104°	88	70	56	45	37	30	24	20
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	105,04°	86,12	69,77	56,41	45,70	37,02	29,69	24,33	19,77
Differents.	1,04°	—1,88	—0,23	0,41	0,70	0,02	—0,31	0,33	—0,23

Den anden Gruppe af Forsøg, som er fremstillet i den horizontale Række Nr. 2, behandlet paa en ganske tilsvarende Maade, giver:

$m = 0{,}001013$, $\log\,(u_0 - \theta_0) = 2{,}05836$, og derefter til Sammenligning med

II. Række af Tab. II følgende Værdier:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.	**6**.	**7**.	**8**.	**9**.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	114°	108	102	96	89	84	80	75	70
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	114,40°	108,00	101,56	95,47	89,8	84,46	79,22	74,76	70,38
Differents.	0,40°	0	—0,41	— 0,53	0,80	0,46	—0,78	—0,24	0,38

Den 3die Gruppe af Forsøg, fremstillet i den horizontale Række Nr. 3, giver paa lignende Maade:

$m = 0{,}001330$, log $(u_0 - \theta_0) = 2{,}07548$ og derefter til videre Sammenligning med den III. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	119°	111	103	94	86	77	74	68	64
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	118,98°	110,30	101,78	93,85	86,60	79,91	73,45	68,07	62,90
Differents	—0,02°	—0,70	—1,22	—0,15	0,60	2,91	—0,55	0,07	—1,10

Den 4de Gruppe af Forsøg, fremstillet i den horizontale Række Nr. 4, giver dernæst:

$m = 0{,}0006098$ og log $(u_0 - \theta_0) = 2{,}07472$ og til Sammenligning med den IV. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	118°	115	111	107	103	98	95	92	89
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	118,77°	114,72	110,56	106,53	102,67	98,96	95,21	91,95	88,67
Differents	0,77°	—0,28	—0,44	—0,47	—0,33	0,96	0,21	—0,05	—0,33

Den 5te Gruppe af Forsøg, fremstillet i den horizontale Række Nr. 5, giver fremdeles:

$m = 0{,}0006544$ og log $(u_0 - \theta_0) = 2{,}08368$ og til Sammenligning med den V. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. 1	2.	3.	4.	5.	6,	7.	8.	9.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	121°	117	113	108	104	98	95	93	89
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	121,25°	116,81	112,28	107,89	103,70	99,69	95,64	92,12	88,61
Differents	0,25°	0,19	—0,72	—0,11	—0,30	1,69	0,64	—0,88	—0,39

Den 6te Gruppe af Forsøg, fremstillet i den horizontale Række Nr. 6, giver følgende Værdier:

$m = 0{,}0004246$ og log $(u_0 - \theta_0) = 2{,}07747$, hvoraf til Sammenligning med den VI. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	119°	117	114	112	107	104	103	101	97
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	119,53°	116,67	113,72	110,80	108,00	105,26	102,47	100,01	97,52
Differents	0,53°	—0,33	—0,28	—1,20	1,00	1,26	—0,53	—0,99	0,52

Den 7de Gruppe af Forsøg, fremstillet i den horizontale Række Nr. 7, giver endelig:

$m = 0{,}0003911$ og $\log (u_0 - \theta_0) = 2{,}09118$ og til Sammenligning med den VII. Række af Tab. II:

Maalerør.	Nr. 1.	2.	3.	4	5.	6.	7.	8.	9.
$(u - \theta_0)$ (observeret)	123°	121	118	115	112	110	107	105	102
$(u - \theta_0)$ (beregnet)	123,36°	120,65	117,83	115,05	112,36	109,73	107,05	104,68	102,28
Differents	0,36°	—0,35	—0,17	0,05	0,36	— 0,23	0,05	—0,32	0,28

Ved at betragte de her foretagne Sammenstillinger mellem de observerede og de beregnede Værdier af $(u - \theta_0)$ viser det sig altsaa, at naar Forholdene, hvorunder Varmen iøvrigt udstrømmer, blive de samme, saaledes som Tilfældet var i de forskjellige Grupper af Iagttagelser, saa stemmer Formlen (12) fuldstændigt overeens med Resultaterne af Forsøg ved alle Varmegrader imellem 20 og 123°, uden at der viser sig mindste Spor til, at Temperaturen skulde aftage hurtigere ved de høiere Varmegrader, end efter den simple Newtonske Lov. Sammenligne vi derimod de fundne Værdier for Constanten m, der svare til de forskjellige Grupper af Forsøg, nemlig af:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}003484 \\ \text{II.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}001013 \\ \text{III.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}001330 \\ \text{IV.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}0006098 \\ \text{V.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}0006544 \\ \text{VI.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}0004246 \\ \text{VII.} \;.\;.\;.\;.\; m = 0{,}0003911 \end{array}\right\}$$

saa viser der sig en betydelig Forskjel, der væsentligt hidrører fra den forskjellige Strømhastighed, hvormed Vandet bevægede sig i Ledningen, men dog ogsaa tildeels afhænger af de forskjellige Vind- og Veirforhold, hvorunder de forskjellige Grupper af Forsøg bleve udførte.

Det maa da først erindres, at ifølge den Newtonske Lov er det ikke m, som ved alle Forsøg med samme Ledning skal være constant, men ifølge Formlen (14) meget mere Størrelsen $g_0 = m_0 \,.\, V$. Sætte vi altsaa:

$$g = 0{,}43429448 \;.\;.\;.\;. \times g_0,$$

saa fordrer den Newtonske Lov, at, naar de ydre Forhold ere uforandrede, skal Størrelsen $g = m \,.\, V$ være constant. Nu have vi fundet Strømhastighederne for de forskjellige Grupper af Forsøg at være følgende:

for I. . . . . $V = 0{,}154$ Fod pr. Sec.
— II. . . . . $V = 0{,}482$ —
— III. . . . . $V = 0{,}333$ —
— IV. . . . . $V = 0{,}957$ —
— V. . . . . $V = 0{,}608$ —
— VI. . . . . $V = 1{,}429$ —
— VII. . . . . $V = 1{,}636$ —.

Udføres Multiplicationen $m \,.\, V$ og vedføies til Sammenligning de tidligere anførte Bemærkninger over Veirforholdene, saa finde vi for Gruppen:

I. . . . . $g = 0{,}0005255$, graa Luft, lidt Luftning af Nordvest.
II. . . . . $g = 0{,}0004883$, Do. Do.
III. . . . . $g = 0{,}0004429$, graa Luft, Nordost Vind, næsten stille.
IV. . . . . $g = 0{,}0005836$, Do. Do.
V. . . . . $g = 0{,}0003979$, Svagt Solskin, Norden Vind, næsten ganske stille.
VI. . . . . $g = 0{,}0006067$, Taage, Sønden Vind, lidt Luftning.
VII. . . . . $g = 0{,}0006399$, Graa Luft, Nordvest Vind, frisk Kuling med circa 30 Fods Hastighed pr. Sec.

Lægge vi nu Mærke til, at, jo større g er, under lige Temperaturforhold, desto stærkere er Afkjølingen, saa bliver det ganske klart, at de Forskjelligheder, hvormed g her fremtræder, maae antages væsentligst at hidrøre fra de ulige Vind- og Veirforhold, hvorunder de forskjellige Grupper af Forsøg bleve udførte, eftersom det er velbekjendt, at Blæst og Taage virke langt mere afkjølende ved lige Varmegrad af Luften, end stille Veir og tør Luft. Jeg troer derfor at turde antage, at det ved de anførte Forsøg er bleven beviist, at den Newtonske Lov og den deraf afledte Formel (14) er fuldstændig gjældende for Varmens Udstrømninger af Ledninger for varmt Vand ved alle de Varmegrader, hvorved disse Forsøg ere udførte, og sandsynligviis er almindeligt gyldig, men i ethvert Fald er gyldig for endnu langt høiere Temperaturer end de, hvorved jeg har experimenteret. Men i Henhold til det ovenfor Anførte troer jeg fremdeles at kunne slutte, at, naar Luften er temmelig stille, det vil sige ved en Hastighed, som jeg vil anslaae til c. 5 Fod pr. Sec., og forøvrigt under sædvanlige Fugtighedsforhold, kan man, uden at begaae nogen mærkelig Feil, antage $g = 0{,}0004$; men da vi paa den anden Side have seet, at en frisk Kuling af Nordvest med c. 30 Fods Hastighed, der dog kun tildeels strøg hen over Apparatet, lod Afkjølingen voxe saaledes, at g blev $= 0{,}00064$, saa troer jeg, at, indtil fuldstændigere Forsøg over Vindens afkjølende Virkning foreligge, tør det antages, at Vindens Indflydelse kan fremstilles ved følgende Formel:

$$g = 0{,}0003\,(1 + 0{,}05\,.\,H), \quad \ldots \quad (16)$$

idet H er Vindens Hastighed i Sec., udtrykt i Fod.

Resultatet af foranførte Forsøg kan altsaa, naar vi erindre, at $m = \frac{g}{V}$, udtrykkes ved følgende Formel:

$$\log (u - \theta_0) = \log (u - \theta_0) + g \cdot \left(\frac{x}{V}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

hvor $\frac{x}{V} = t$ fremstiller den Tid, hvori den betragtede Vanddeel, udsat for Afkjøling, sænker sin Temperatur fra u_0 til u; men heraf følger, naar vi indsætte Værdien for g, ifølge (16), at

$$t = \frac{3330}{1 + 0{,}05 \cdot H} \log \left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

Multiplicere vi Ligningen (17) med Modulus $\frac{g_0}{g} = 2{,}302585\ldots$, saa finde vi let:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0) e^{-0{,}00069(1+0{,}05 . H) . t}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

der fremstiller Vandets Temperatur efter Forløbet af Tiden t.

Af Formlen (19) følger Afkjølingshastigheden:

$$\left(-\frac{du}{dt}\right) = 0{,}00069\,(1 + 0{,}05 \cdot H)\,(u - \theta_0), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

der altsaa fremstiller Temperaturtabet pr. Sec. ved Temperaturdifferentsen $(u - \theta_0)$ for den her betragtede Ledning, hvis indre Tværsnitsareal var 0,0052 □ Fod og hvis ydre Omtræk var 0,345 Fod. Har Ledningen andre Dimensioner, saa vil Temperaturtabet pr. Sec. blive et andet, hvilket vi dog uden Vanskelighed kunne bestemme i Forhold til Temperaturtabet ved den her betragtede Ledning. Tiden, som vil medgaae, inden Temperaturen af den Vædske, som strømmer igjennem Ledningen, nedsvales fra en given Størrelse u_0 til en anden u, vil, naar den omgivende Lufts Temperatur stadig er θ_0, voxe proportionalt med den i Ledningen indeholdte Varmemængde, altsaa proportionalt med Strømmens Tværsnitsareal, medens den vil aftage proportionalt med den ydre Overflades Størrelse. Betegne vi altsaa Ledningens indre og ydre Diametre ved δ og D, saa vil den Tid T, som medgaaer, før Vandet har gjennemløbet en saa stor Længde x, at Temperaturen imidlertid har sænket sig fra u_0 til u, blive:

$$T = \frac{\frac{\pi}{4}\delta^2}{0{,}0052} \cdot \frac{0{,}345}{\pi \cdot D} \cdot t = 16{,}59 \cdot \frac{\delta^2}{D} \cdot t$$

og indsætte vi Værdien for t ifølge (18), erholde vi:

$$T = \frac{55300}{1 + 0{,}05 \cdot H} \cdot \frac{\delta^2}{D} \cdot \log \left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

Betegne vi dernæst Ledningens Vandføring i Secundet ved Q, saa er Hastigheden:

$$V = \frac{4}{\pi} \frac{Q}{\delta^2}.$$

Multiplicere vi (21) hermed, og bemærke vi derhos, at $V \cdot T = x$, saa finde vi den Vei x, udtrykt i Fod, som Vandet maa gjennemløbe for at Temperaturen skal synke fra u_0 til u, at være:

$$x = \frac{70400}{1+0{,}05 . H} . \frac{Q}{D} . \log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Indsætte vi endelig $t = \frac{1}{16{,}59} . \frac{D}{\delta^2} . T$ i Formlen (19), saa finde vi:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0) e^{-0{,}000042\,(1+0{,}05 . H)\frac{D}{\delta^2} . T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

og heraf følger Varmetabet pr. Sec.:

$$\left(-\frac{du}{dT}\right) = 0{,}000042\,(1 + 0{,}05 . H)\frac{D}{\delta^2}(u - \theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

For en Længde af Ledningen $= dx$, hvis Temperatur $= u$, vil det i Ledningen indeholdte Vands Vægt være $= \frac{\pi}{4}\delta^2 . dx . 62$ ℔, og da Temperaturformindskelsen, som denne Vandmængde lider i Secundet, er fremstillet ved Formlen (24), saa vil den Varmemængde, som Længden dx taber i Secundet, være fremstillet ved:

$$0{,}00205\,(1 + 0{,}05 . H)\, D\,(u - \theta_0) . dx.$$

Den ydre Overflade af Røret, hvorigjennem denne Varmemængde udstrømmer, er $\pi D . dx$, og den Varmemængde, som udstrømmer i Sec. igjennem 1 □ Fod Overflade, bliver altsaa:

$$W = 0{,}00064 . (1 + 0{,}05 . H)\,(u - \theta_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

naar W udtrykkes i danske Varme-Eenheder (1 ℔ Vand 1° C.).

Med Hensyn til Størrelsen m_0, Formel (12), vil det her være passende at gjøre en Bemærkning. Naar vi sammenligne Formlerne (13) og (24), saa viser det sig, at:

$$g_0 = 0{,}000042\,(1 + 0{,}05 . H)\frac{D}{\delta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

og deraf følger, da $g_0 = m_0 . V$, at:

$$m_0 = 0{,}000042\,(1 + 0{,}05 . H)\frac{D}{\delta^2 . V}.$$

Men naar vi betragte Formlen (12) og navnlig Udtrykket for m_0, saa bemærke vi, at $(a . V . \varrho . w . u)$ fremstiller den hele Varmemængde, som i en Tids-Eenhed strømmer forbi det Punkt af Ledningen, hvis Temperatur er u, samt, at $(2aku)$ fremstiller det Dobbelte af den Varmemængde, som i samme Tid vilde strømme igjennem Ledningens Tværsnitsareal, hvis Vandstrømmens Hastighed var Nul og Differentstemperaturen paa en Længde-Eenhed af Ledningen var u. Men denne sidste Varmemængde vil aabenbart stedse være meget lille imod den første, naar V ikke er ganske ubetydelig, og deraf følger, at $\left(\frac{V\varrho w}{2k}\right)$ stedse er et stort Tal. Af den ovenfor fundne Værdi for m_0, sees det imidlertid, at m_0 er et lille Tal, og det bliver derfor indlysende, ifølge Formlen (12), at $\left(\frac{hp}{ak}\right)$ maa være saa lille imod $\left(\frac{V\varrho w}{2k}\right)^2$ at vi med tilstrækkelig Nøiagtighed kunne skrive:

$$m_0 = \frac{hp}{aV\varrho w}.$$

Men nu er $p = D\pi$ og $a = \frac{\pi}{4}\delta^2$, og følgelig erholde vi:

$$m_0 = \frac{4Dh}{V\delta^2\varrho w},$$

som sammenlignet med foranstaaende Udtryk for m_0 viser, at, da vi for Vand have $\varrho = 1$ og $w = 1$, saa er:

$$h = 0{,}00001 \,.\, (1 + 0{,}05 \,.\, H) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

hvor h er den Varmemængde, udtrykt i Cubikfod Vand opvarmet 1° C., som udstrømmer i Secundet igjennem en Qvadratfod af Ledningens Overflade, naar Ledningens Varme overskrider den omgivende Lufts Varme med 1 Grad Celsius.

Indsætte vi det ovenfor fundne Udtryk, $m_0 = \frac{hp}{a\varrho w \,.\, V}$, i Formlen (12), erholdes:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-\frac{hp}{a\varrho w}\,.\,\frac{x}{V}} = (u_0 - \theta_0)e^{-\frac{hp}{a\varrho w}\,.\,t} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Staaer Vandet derimod stille i Ledningen, saa er $V = 0$, og i dette Tilfælde reducerer Formlen (12) sig til den bekjendte Formel for Varmens Forplantelse i en prismatisk eller cylindrisk Stang, nemlig:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-\sqrt{\frac{p.h}{a.k}}\,x}.$$

Men bemærkes herved, at, hvad enten Vandet staaer stille eller ei, maa Størrelsen h være den samme, naar Temperaturen er den samme, saa finde vi, naar vi erindre, at Constanten $g_0 = m_0 \,.\, V = \frac{ph}{a\varrho w}$ og altsaa $\frac{ph}{a} = g_0\varrho w$, at ovenstaaende Formel kan skrives:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-\sqrt{\frac{g_0\varrho w}{k}}\,.\,x},$$

som kun er afhængig af Varmeledningsevnen k, men er uafhængig af Varmeudstraaleevnen h.

Efter at jeg nu har udviklet de Formler som fremstille Varme-Forholdene, der svare til en Ledning, som gjennemstrømmes af en constant Strøm af varmt Vand under permanente Temperaturforhold og derved tillige har paaviist, at den Newtonske Lov og de Poissonske Formler stemme med Forholdene i Naturen, vil jeg betragte det Tilfælde, hvor Ledningen er fyldt med varmt Vand, som er stillestaaende, et Tilfælde, som blandt andet indtræder, naar Afløbshanen B pludselig lukkes efterat Temperaturforholdene i Ledningen under en given Vandføring ere blevne permanente. I dette Tilfælde vil ikke alene den i Ledningen indeholdte Vandmasse tabe i Varme, men ogsaa selve Ledningens Varme vil tabe sig med Vandets Varme. Betegne vi Vædskens Tæthed og Varmefylde ved ϱ og w og Ledningens Tæthed og Varmefylde ved ϱ_1 og w_1, saa vil den samlede Varmemængde, som Vædsken og Ledningen indeholder, naar Temperaturen er u, være:

$$\frac{\pi}{4}\,[\varrho w\delta^2 + \varrho_1 w_1(D^2 - \delta^2)]u$$

og da det, som sagt, er klart, at den samme Ledning maa udsende ligemegen Varme, hvad enten Vandet staaer stille eller flyder igjennem samme, naar blot Temperaturen er ligestor i begge Tilfælde, saa vil det ogsaa være indlysende, at, naar Vandet staaer stille, saa vil Tiden, som medgaaer for at Temperaturen skal synke fra u_0 til u, være fremstillet ved Formlen:

$$T_1 = \frac{\varrho w \delta^2 + \varrho_1 w_1 (D^2 - \delta^2)}{\varrho w \delta^2} . T', \qquad (29)$$

idet T' er bestemt ved Formlen (21).

I det foreliggende specielle Tilfælde, som vi have undersøgt, var $D = 1{,}32''$ og $\delta = 1''$, altsaa $\delta^2 = 1$ og $(D^2 - \delta^2) = 0{,}74$ □ Tommer.

Sætte vi nu $\varrho = 1$ og $w = 1$, $\varrho_1 = 7{,}5$ og $w_1 = 0{,}11$, respective for Vandstrømmen og for Jernledningen, saa finde vi $T_1 = 1{,}6 . T$,

som viser, at Afkjølingstiden for Vand, som stod stille, maatte forøges med henimod $\frac{2}{3}$ af hvad den var, naar Vandet strømmer igjennem Ledningen under permanente Temperaturforhold. Indsætte vi Værdien for T, som for dette specielle Tilfælde er udtrykt i Formlen (18), saa finde vi T_1, udtrykt i Minuter, ved Hjælp af følgende Formel:

$$T_1 = \frac{89}{1 + 0{,}05 . H} . \log \left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0} \right) \qquad (30)$$

Jeg skal nu fremstille Resultaterne af en Række af Forsøg, som jeg udførte, efterat Forsøgene af 3die Februar vare sluttede og Afløbshanen B var lukket saa nær i, at Vandføringen kun beløb sig til 1 Pot i 6 Minuter, og Strømhastigheden følgelig var 1 Fod pr. Minut. Denne ringe Strømhastighed vedligeholdtes under Forsøgene for nogenlunde at ophæve den forøgede Afkjøling, som det antoges, at de af denne tynde Ledning fremstaaende Maalerør kunde give Anledning til, naar Vandet var ganske stillestaaende i Ledningen, uagtet bemeldte Maalerør, tilligemed Ledningen, umiddelbart ved Maalerørene, bleve beskyttede mod særlig Afkjøling ved noget omviklet Filt.

Efter at Forsøgene af 3die Februar, der ere meddelte i Tab. I, vare tilende, blev Afløbshanen B lukket, lige umiddelbart efterat samtlige Temperaturer i alle 9 Maalerør vare noterede, og derpaa bleve Temperaturerne i disse Maalerør bestemte, Minut efter Minut saaledes, som de findes anførte i efterfølgende Tabel III, hvori u betegner Temperaturen og T_1 Tiden, i Minuter, da u observeredes, regnet fra det Øieblik (Kl. $3^h\ 40^m$), da Hanen B lukkedes.

Tabel III.

VIII. Forsøgsrække.

Maalerør																	
Nr. 1.		Nr. 2.		Nr. 3.		Nr. 4.		Nr. 5		Nr. 6.		Nr. 7.		Nr. 8		Nr. 9.	
u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1	u	T_1
122,1°	0m	119,5°	0m	117,0°	0m	114,0°	0m	110,0°	0m	105,7°	0m	105,5	0m	102,4°	0m	99,0°	0m
		109,5	2,5	108,5	3,5	97,3	4,5	90,1	5,5	81,7	6,5	73,0	7,5	74,0	8,5	65,0	9,5
		74,0	10,5	63,2	11,5	69,0	12,5	63,0	13,5	55,8	14.5	47,0	15,5	51,5	16,5	43,5	17,5
		50,4	18,5	43,3	19,5	47,0	20,5	43,8	21,5	38,6	22,5	33,5	23,5	34,9	24,5	30,7	25,5
		36,0	26,5	31,4	27,5	30,6	28,5	31,1	29,5	26,7	30,5	25,0	31,5	22,5	32,5	23,0	33,5
		29,0	34,5	23,4	35,5	20,0	36,5										

Ved at betragte denne Tabel, viser det sig, at de stedfundne Afkjølinger have været en Deel forskjellige, saavel til forskjellige Tider, som paa de forskjellige Punkter af Ledningen. Blandt andet see vi, at Afkjølingerne have været forholdsviis størst ved de ydre Ender af Ledningen, hvor Maalerørene Nr. 3 og 7 vare anbragte, hvilket har sin naturlige Grund deri, at disse Punkter laae friest og meest udsatte for Vinden.

See vi bort herfra og fra den lille Varmemængde, som stadigt tilførtes Forsøgsledningen derved, at Vandet ikke stod fuldkommen stille, saa skal Temperaturaftagelsen altsaa kunne fremstilles ved Formlen (30), naar H tillægges den Værdi, som følger af de omtalte Forsøg og som kan bestemmes af Ligningen:

$$g = 0{,}0003\ (1 + 0{,}05\,.\,H) = 0{,}0006067,$$

som giver $H = 20$ Fod, der indsat i (30) giver:

$$T_1 = 44\,.\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right).$$

Ved nu at betragte de forskjellige Maalerør, og ved for ethvert af disse successivt at indsætte den oprindelige Temperatur, svarende til det Øieblik, da Afløbshanen B blev lukket, istedetfor u_0 samt ved derhos at erindre, at Lufttemperaturen under alle Forsøgene var $\theta_0 = 3{,}0^\circ$, saa finde vi Slutningstemperaturen

for Maalerøret Nr.	2,	svarende til	$T_1 = 34{,}5^m$,	at være:	$u = 16^\circ$
Do.	3,	—	$= 35{,}5^m$,	—	$u = 15^\circ$
Do.	4,	—	$= 36{,}5^m$,	—	$u = 14^\circ$
Do.	5,	—	$= 29{,}5^m$,	—	$u = 20^\circ$
Do.	6,	—	$= 30{,}5^m$,	—	$u = 18^\circ$
Do.	7,	—	$= 31{,}5^m$,	—	$u = 17^\circ$
Do.	8,	—	$= 32{,}5^m$,	—	$u = 15^\circ$
Do.	9,	—	$= 33{,}5^m$,	—	$u = 14^\circ$,

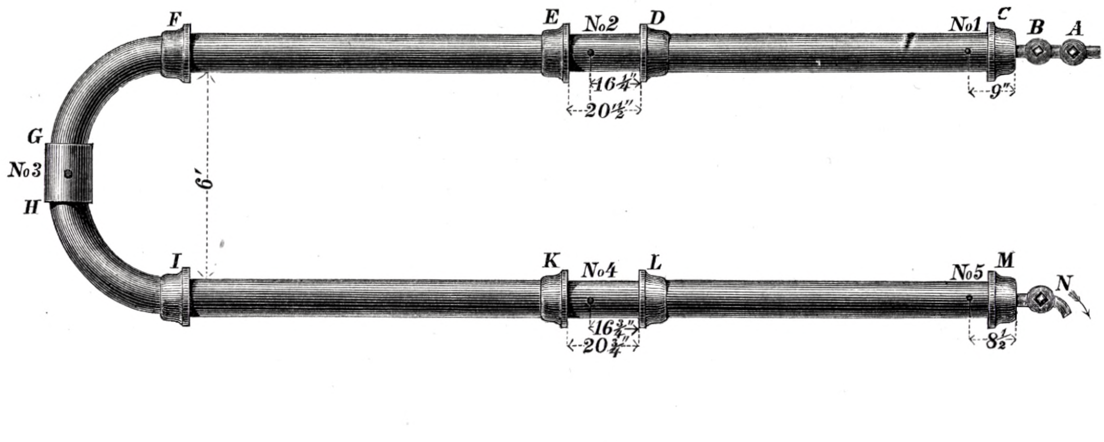
hvoraf fremgaaer, at de saaledes beregnede Slutningstemperaturer for de forskjellige Maalerør alle ere mindre end de observerede, væsentligt hidrørende derfra, at Vandstrømmen ikke stod stille i Ledningen, men tværtimod uophørligt tilførte denne en lille Varmemængde, som især viser sig ved Maalerøret Nr. 2. Afvigelserne ere forøvrigt saa smaa, at jeg ikke tør opholde mig ved at undersøge, om de maaske tildeels kunne hidrøre fra, at Vindhastigheden kan have været mindre end forudsat (20 Fod pr. Sec.), især da jeg ikke tør tillægge disse Afvigelser nogen stor Vægt, fordi Ledningens Diameter var temmelig lille for denne Slags Forsøg, og jeg kan saameget bedre forbigaae disse Afvigelser her, som jeg i det Følgende vil komme til at fremstille andre Forsøg med større Rør, der ere mere paalidelige i denne Henseende.

Før jeg gaaer over til at beskrive de Forsøg, som jeg har udført med en Ledning af 4 Tom. Rør, skal jeg fremhæve Resultatet af et Forsøg, som jeg udførte med den 1 Tom. Ledning efter at alle foranførte Forsøg vare tilende, og som formeentlig fortjener at noteres.

Det var mig nemlig ubekjendt, hvorvidt Vand, under ellers lige Forhold, strømmer lettere og derved tillige hurtigere igjennem en Rørledning, naar det er varmt, end naar det er koldt; men det forekom mig, at, naar man seer hen til andre Vædsker (forskjellige Olier t. Ex.), hvis Bevægelighed voxer med Temperaturen, var det ikke usandsynligt, at noget saadant ogsaa kunde finde Sted ved Vandet. For at prøve, hvorledes det i denne Henseende forholdt sig, aflukkede jeg Afløbshanen B paa Ledningen og lod Vandet i samme henstaae, under Damptrykket i Kjedlen, indtil Vandet i Ledningen havde en Temperatur af mellem 2 og 4 Grader C. Derefter aabnede jeg Afløbshanen B saaledes, at Vandføringen beløb sig til 15 Potter i 33 Sec., og da jeg ligefrem bestemte Middeltemperaturen af den saaledes udstrømmende Vandmængde, fandt jeg denne at være c. 4 Grader. Efter at Vandet derpaa i nogen Tid havde vedblevet at strømme igjennem Ledningen, maalte jeg Ledningens Vandføring paany, under uforandret Damptryk i Kjedlen, og fandt, at denne endnu beløb sig til 15 Potter i 33 Sec., skjøndt det udstrømmende Vand nu havde en Temperatur af c. 90° C. — I Henhold hertil troer jeg derfor at turde antage, at Modstanden imod Vandets Bevægelse i en Ledning er meget nær ligestor, enten Vandets Temperatur er 4° eller 90° Celsius.

Efter at Forsøgene med den 1 Tom. Ledning vare tilende, blev denne Ledning borttaget og en Ledning af 4 tommige Støbejernsrør samlet og opstillet i dens Sted. De forskjellige Rør, der bestode af almindelige Vandledningsrør, bleve samlede med Blypakninger paa sædvanlig Maade og forøvrigt opstillede saaledes, som efterfølgende Skitze, Figur 2, viser:

Fig. 2.



Ledningen var henlagt paa Træbukke, ligesom den 1 Tom. Ledning, med et jevnt Fald fra A til N; dens Høide over Jorden ved C var 3 Fod og dens Høide ved M 2 Fod 2″.

Afstanden fra Maalerør Nr. 1 til Maalerør Nr. 2 var 10′ $8^3/_4$″ dansk.

Do.	Nr. 2	—	Nr. 3	—	12′ $9^3/_4$″ —
Do.	Nr. 3	—	Nr. 4	—	13′ $1^3/_4$″ —
Do.	Nr. 4	—	Nr. 5	—	9′ $9^1/_2$″ —

Rørledningens indre Middeldiameter var 3,9 Tommer = 0,325 Fod dansk og dens udvendige Middeldiameter, uden Hensyn til Mufferne, var 4,66 Tommer = 0,39 Fod, men med Hensyn til disse kan den sættes lig 0,40 Fod. Vægten af hele den 4 Tom. Ledning, med Undtagelse af Røret G H, var 885 ℔ og Vægten af Røret G H, der havde en indvendig Diameter af 0,5 Fod, en udvendig Diameter af $6^3/_4$ Tom. eller 0,5625 Fod og en Længde af 22 Tom., var 47 ℔. Den indvendige Lysning af den 4 Tom. Ledning kan sættes lig 0,083 □ Fod og den i samme indeholdte Vandmasses Vægt lig 243,4 ℔. Maalerørene vare indskruede saa dybt, at Overfladen af Bundproppen laa $2^1/_8$ til $2^3/_8$ Tomme under Rørets Overkant og Qviksølvhøiden i disse beløb sig til 1 Tom. over Bunden. Hele Ledningen, som i varm Tilstand var bleven overdraget med et tyndt Lag af Steenkulstjære, havde et næsten ganske mat Udseende. Med denne Ledning blev der foretaget følgende Forsøg:

IX. Forsøgsrække. Under en Vandføring af 15 Potter i 69 Sec., eller 0,0068 Cbfd. pr. Sec., udførtes d. 13de Februar følgende Forsøg. Vinden var Østen, men temmelig stille; Luften halv klar med lidt Solskin igjennem den disige Luft, Lufttemperaturen var ÷ 1,4° C.

Tabel IV.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummere.				
	1.	2.	3.	4.	5.
1	118,8° C.	123,0° C.	118,0° C.	113,0° C.	109,1° C.
2	120,0	123,7	118,8	114,0	110,0
3	119,2	123,0	119,0	114,3	110,9
4	117,7	121,5	118,0	114,2	110,6
5	115,7	119,3	116,5	113,2	109,8
6	116,1	120,0	115,2	111,2	107,7
7	114,2	116,7	114,2	110,6	107,3
8	115,0	117,3	114,4	112,5	109,4

Efter at denne Række af Observationer var tilende, lukkedes Afløbshanen N heelt i; Vandføringen var altsaa = 0. Derefter observerede jeg Temperaturen i de to Maalerør Nr. 2 og 4 til bestemte Tider, og Resultatet af disse Forsøg findes i efterfølgende Tabeller V og VI, hvori T_1 betegner Afkjølingstiden, udtrykt i Minuter, og u betegner Temperaturen af Vandet. Afløbshanen lukkedes omtrent Klokken 1¼ Eftermiddag og Forsøgene, der begyndtes samtidigt, varede til Klokken 5½ Eftermiddag. Ved Forsøgenes Begyndelse var Lufttemperaturen som før — 1,4° C., efter en Tid af 47 Minuter var den aftaget til — 2,2° C., og ved Forsøgenes Slutning var den — 4,0° C.

Tabel V. Observation ved Maalerøret Nr, 2.

X. Forsøgsrække a.

T_1	0	0,5	2,0	3,5	5	8	11	14	1	22	Minuter.
u	117,3	116,7	113,9	111,6	109,6	106,2	102,2	98,8	95,0	89,7	Grader C.
T_1	27	37	47	62	77	92	107	139	182	227	Minuter.
u	85,0	77,0	69,2	59,6	51,0	44,0	37,7	27,1	17,2	10,4	Grader C.

Tabel VI. Observation ved Maalerøret Nr. 4.

X. Forsøgsrække b.

T_1	0	1,5	3	4,5	7	10	13	16	19	24	Minuter.
u	112,5	104,4	103,0	101,0	98,0	94,2	97,1	87,7	84,7	79,7	Grader C.
T_1	29	39	49	64	79	94	109	141	184	229	Minuter.
u	74,4	68,0	61,0	51,8	43,8	37,8	32,0	23,0	14,3	8,2	Grader C.

Den 14de Februar foretog jeg følgende 3de Rækker af Forsøg med den 4 Tom. Ledning.

XI. Forsøgsrække. Klokken 11 Formiddag under sydlig Vind, temmelig stille Veir, graa Luft, samt ved en Vandføring af 15 Potter i 260 Secunder eller 0,0018 Cbfd. pr. Sec. Lufttemperaturen = 0,5° C.

Tabel VII.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummer.				
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
9	118,8° C.	112,3° C.	103,0° C.	93,4° C.	87,7° C.
10	118,7	112,3	103,0	93,3	87,6
11	120,0	112,4	103,1	92,9	87,0
12	121,2	113,2	103,0	92,0	86,1

XII. Forsøgsrække. Forsøgene fortsattes samme Dag Kl. 12. Vinden var bleven Nord-Nordvest, men det var næsten stille Veir og forøvrigt som Kl. 11. Lufttemperaturen var 1,0° C. og holdt sig meget eensformig.

Tabel VIII.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummer.					Det udstrømmede Vands Varme.
	1.	2.	3.	4.	5.	
13	121,0° C.	114,1° C.	103,9° C.	91,7° C.	84,9° C.	
14	121,8	114,8	104,1	92,0	85,0	83,5°.
15	120,1	114,3	103,7	91,1	84,9	Dette Forsøg sluttedes Kl. 1¼.

XIII. Forsøgsrække. Forsøgene fortsattes samme Dags Eftermiddag Kl. 4, men under en Vandføring af 1 Pot i 25 Sec. eller 0,00125 Cbfd. pr. Sec., Vind og Veirforholdene vare omtrent som Kl. 12; lidt Solskin.

Tabel IX.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummer.					Det udstrøm. Vands Varme.	Luftens Varme.	Klokkeslet.
	1.	2.	3.	4.	5.			
16	117,5° C.	106,0° C.	90,7° C.	74,3° C.	67,8° C.		1,0° C.	4
17	117,3	104,9	89,0	72,2	65,1		—1,2	5
18	117,1	104,1	88,9	71,4	65,0			
19	117,1	104,1	88,5	71,2	65,0	63,5°	—2,0	5½

XIV. Forsøgsrække. Forsøgene med den 4 Tom. Ledning bleve fortsatte d. 15de Februar under en Vandføring af 1 Pot i 53 Sec. eller 0,00059 Cbfd. pr. Sec. Sydvest Vind, men temmelig stille, graa Luft.

Tabel X.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummer.					Det udstrøm. Vands Varme.	Luftens Varme.	Klokkeslet.
	1.	2.	3.	4.	5.			
20	100,5° C.	78,0° C.	55,0° C.	37,0° C.	28,6° C.	27,4°	—2,0° C.	3 Efterm.
21	100,9	77,7	55,0	37,0	28,7	27,3°		
22	102,3	77,5	54,1	36,5	27,8			5 —
23	102,1	78,0	54,0	36,2	28,3	27,3°	—1,0	

Det bemærkes, at Samlingen ved G, Fig. 2, var noget utæt og gav omtrent 1 Pot Vand i 10 Minuter.

XV. Forsøgsrække. Den 13de Marts blev der foretaget følgende Forsøg med den 4 Tom. Ledning i Middagsstunden, under en Vandføring af 15 Potter i 71 Sec. eller 0,0066 Cbfd. pr. Sec. Luften var graa, men næsten ganske stille; Vindens Hastighed c. 10 Fod pr. Sec.

Tabel XI.

Forsøgenes Nummer.	Maalerørenes Nummer.					Luftens Varme.
	1.	2.	3.	4.	5.	
24	120,9° C.	117,7° C.	114,0° C.	112,5° C.	109,8° C	0,9° C.
25	120,9	118,8	114,0	112,0	109,5	

Betragte vi Forsøgene Nr. 1 til 8, som findes i Tabel IV. og ere udførte med den 4 Tom. Rørledning, saa viser det sig, at Temperaturen i Maalerøret Nr. 1 er mindre end Temperaturen i Maalerøret Nr. 2 og omtrent ligestor med Temperaturen i Maalerøret Nr. 3. Anledningen til dette Forhold, som ved første Øiekast skulde synes at være en Umulighed, finder man imidlertid i Constructionen af Apparatet. Vandet fra Dampkjedlen strømmede nemlig ind i Forsøgsledningen igjennem et lille halvtommigt Rør, og Vandstrømmen havde altsaa ved Indtrædelsen i den 4 Tom. Ledning en forholdsviis betydelig Hastighed imod den, hvormed Vandet i Forsøgsledningen ellers bevægede sig, og da det indstrømmende Vand ikke i et Øieblik kunde afgive sit Overskud af Hastighed over den i Forsøgsledningen normale Hastighed, men nødvendig kun kunde tabe denne efterhaanden, som den mødte Modstand, saa er det klart, at i Forsøgsledningens Munding kunde Vandmassen ikke heelt og holdent komme i Drift. En Deel af denne Vandmasse er altsaa alene bragt i en hvirvlende Bevægelse i Nærheden af Indløbet, formedelst den hurtigt indtrædende Strøm fra det halvtommige Rør. Men naar hele Vandmassen først kunde komme i Drift efter at Straalen havde passeret Maalerøret Nr. 1, saa kunde dette Rør naturligviis heller ikke angive det indstrømmende Vands Varme.

I Henhold til det saaledes Udviklede, tør vi derfor kun antage Angivelsen af Maalerøret Nr. 1 som rigtig, naar Strømhastigheden er ganske lille; i andre Tilfælde maae vi udelade denne Observation. Med Hensyn til de af Vandstrømmen gjennemløbne Længder af Ledningen, bemærkes her, at Afstanden fra Maalerøret Nr. 2 til ethvert af de efterstaaende Maalerør i den 4 Tom. Ledning var følgende:

Afstanden fra Maalerør Nr. 2 til Maalerør Nr. 3 var . . . 12,8 Fod.
— Do. 2 — 4 — . . . 26,0 —
— Do. 2 — 5 — . . . 35,75 —

Gaae vi nu ud fra de 25 Forsøg, som ere angivne i Tab. IV, VII, VIII, IX, X og XI, samt antage vi foreløbigt, at Loven for Temperaturaftagelsen langs ad Ledningen kan fremstilles ved Formlen (15), saa vil det ikke være vanskeligt at bestemme de Værdier for Constanterne m og log $(u_0 - \theta_0)$ som efter Forsøgene ere de sandsynligste for hver af disse 6 Grupper af Observationer, og det vil da vise sig, om Antagelsen, at Formlen (15) fremstiller den søgte Lov, stemmer med Erfaring, samt hvorvidt de øvrige udviklede Formler for Varmens Fordeling i og Udstrømning af en cylindrisk Ledning for varmt Vand kunne ansees for at være rigtige.

Betragte vi til den Ende Forsøgene Nr. 1 til 8, Tabel IV, og søge vi Middeltallene af Værdierne for $(u - \theta_0)$, svarende til hvert enkelt Maalerør, idet vi antage Lufttemperaturen $\theta_0 = -1{,}4$, saa finde vi følgende 4 Ligninger til Bestemmelsen af de to Størrelser m og log $(u_0 - \theta_0)$:

$$\left.\begin{aligned} \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}08636 + 0{,}00 \,.\, m \\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}07262 + 12{,}8 \,\;.\, m \\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}05805 + 26{,}0 \,\;.\, m \\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}04454 + 35{,}75 \,.\, m \end{aligned}\right\}$$

og ved herpaa at anvende den approximerede mindste Qvadratmethode, som jeg har meddelt i Videnskabernes Selskabs Oversigter for Aaret 1857, finder man let følgende Værdier:

$$m = 0{,}001167 \text{ og } \log(u_0 - \theta_0) = 2{,}08718.$$

Indsættes disse Værdier i Formlen (15), findes:

$$\log(u - \theta_0) = 2{,}08718 - 0{,}001167 \,.\, x,$$

hvoraf Værdierne for $(u - \theta_0)$, svarende til de forskjellige Maalerør, lade sig beregne. Udføre vi denne Beregning og sammenstille vi de beregnede Temperaturer med Middeltallene af de observerede, saa finde vi:

Maalerørets Nummer.	2.	3.	4.	5.
Observeret u.	120,6° C.	116,8° C.	112,9° C.	109,4° C.
Beregnet u	120,8	116,7	112,6	109,4
Differents	—0,2	0,1	0,3	0,0

som viser, at de beregnede og de observerede Temperaturer næsten ganske falde sammen.

Ville vi dernæst sammenligne ovenstaaende Formel med Formlen (22) i det Foregaaende, saa maae vi erindre, at, medens den her omhandlede 4 Tommers Støbejerns Vandledning havde et Overdrag af Steenkulstjære, saa havde den 1tommige Smedejerns Ledning, hvormed de tidligere omtalte Forsøg bleve udførte, sin naturlige metalliske Overflade, og som en Følge heraf maae vi indføre en Coefficient n, som afhænger af Forholdet mellem Varme-Udstraaleevnen for de to Ledninger, men som maa være den samme i alle Forsøgene. En Sammenligning mellem den her fundne Formel for Varmens Aftagen langs ad den 4 Tom. Ledning og Formlen (22) viser da let, at vi maae have:

$$m = 0{,}001167 = n \,.\, \frac{1 + 0{,}05 \,.\, H}{70400} \,.\, \frac{D}{Q};$$

men da vi fremdeles have $D = 0{,}4$ Fod og Vandføringen $Q = 0{,}0068$ Cubikfod pr. Sec., altsaa $\frac{D}{Q} = 58{,}8$, saa finde vi følgende Betingelsesligning:

$$0{,}001167 = 0{,}00083\,(1 + 0{,}05\,.\,H)\,.\,n.$$

Betragte vi dernæst Forsøgene Nr. 9—12 Tabel VII, som udførtes under en Lufttemperatur $\theta_0 = 0{,}5°$, og tage vi ogsaa her Middeltemperaturerne for hvert Maalerør, saa findes, naar vi indsætte de forskjellige Værdier for $(u - \theta_0)$ i Formlen (15), følgende 4 Ligninger:

$$\left.\begin{aligned} \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}04922 + 0{,}00\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}01072 + 12{,}8\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}96567 + 26{,}0\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}93752 + 35{,}75\,.\,m \end{aligned}\right\}$$

hvoraf paa lignende Maade erholdes:

$$m = 0{,}00316 \text{ og } \log\,(u_0 - \theta_0) = 2{,}04976.$$

Naar disse Værdier indsættes i Formlen (15), saa kan man beregne de Temperaturer, som svare til de forskjellige Maalerør; udføres dette og sammenstilles Resultatet med Middeltallene af Forsøgene Nr. 9—12, saa finde vi:

Maalerørets Nummer.	1.	2.	3.	4.	5.
Observeret u	119,7° C.	112,5° C.	103,0° C.	92,9° C.	87,1° C.
Beregnet u	121,8	112,6	102,8	93,4	86,9
Differents	—2,1	—0,1	0,2	—0,5	0,2

som viser, at med Undtagelse af Temperaturen i Maalerøret Nr. 1, der synes at have været c. 2 Grader for lav, stemmer de beregnede og de observerede Temperaturer særdeles vel overeens. Naar vi dernæst atter her sætte:

$$m = 0{,}00316 = n\,\frac{1 + 0{,}05\,.\,H}{70400}\,.\,\frac{D}{Q}$$

og bemærke, at $D = 0{,}4$, $Q = 0{,}0018$ og $\frac{D}{Q} = 222$, saa finde vi:

$$0{,}00316 = n\,.\,0{,}00315\,(1 + 0{,}05\,.\,H).$$

Underkaste vi Forsøgene Nr. 13—15, Tabel VIII, en lignende Beregning, idet $\theta_0 = 1{,}0°$, saa finde vi følgende 4 Ligninger til Bestemmelse af m og $\log\,(u_0 - \theta_0)$

$$\left.\begin{aligned} \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}05461 + 0{,}00\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}01242 + 12{,}8\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}95713 + 26{,}0\,.\,m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}92376 + 35{,}75\,.\,m \end{aligned}\right\}$$

og deraf følger paa samme Maade, som forhen:

$$m = 0{,}00372 \text{ og } \log\,(u_0 - \theta_0) = 2{,}05630.$$

Men heraf finde vi:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.
Observeret u	121,0° C.	114,4° C.	103,9° C.	91,6° C.	84,9° C.
Beregnet u	125,8	114,8	103,0	92,1	84,8
Differents	−4,8	−0,4	0,9	−0,5	0,1

som atter, med Undtagelse af Temperaturen i Maalerøret Nr. 1, der synes at have været 4,8° for lav, viser en næsten fuldstændig Overeensstemmelse med de observerede Temperaturer.

Sætte vi nu fremdeles:

$$m = 0{,}00372 = n \,.\, \frac{1 + 0{,}05 \,.\, H}{70400} \,.\, \frac{D}{Q},$$

og $\frac{D}{Q} = 222$, ligesom foran, saa finde vi:

$$0{,}00372 = n \,.\, 0{,}00315\,(1 + 0{,}05 \,.\, H).$$

Underkaste vi Forsøget Nr. 16, Tabel IX, en lignende Beregning, idet $\theta_0 = 1{,}0°$, saa finde vi:

$$\left.\begin{aligned} \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}02119 + 0{,}00 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}95279 + 12{,}8 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}86510 + 26{,}0 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}82478 + 35{,}75 \,.\, m \end{aligned}\right\},$$

følgelig: $m = 0{,}005622$ og $\log\,(u_0 - \theta_0) = 2{,}02071$,

og deraf fremgaae følgende Værdier for u:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.
u (observeret)	117,5° C.	106,0° C.	90,7° C.	74,3° C.	67,8° C.
u (beregnet)	121,5	105,9	89,7	75,9	67,0
Differents	−4,0	0,1	1,0	−1,6	0,8

som ligeledes, paa Nr. 1 nær, stemme meget godt med Observationerne.

Sætte vi $m = 0{,}005622 = n \,.\, \frac{1 + 0{,}05 \,.\, H}{70400} \,.\, \frac{D}{Q}$ og bemærke, at $D = 0{,}4'$ $Q = 0{,}00125$ Cbfod, altsaa $\frac{D}{Q} = 320$, saa finde vi:

$$0{,}005622 = n \,.\, 0{,}00455\,(1 + 0{,}05 \,.\, H).$$

En lignende Beregning anvendt paa Forsøgene Nr. 17—19, Tab. IX, idet $\theta_0 = -1{,}5°$, giver:

$$\left.\begin{aligned} \log\,(u_0 - \theta_0) &= 2{,}02490 + 0{,}00 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}96047 + 12{,}8 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}86392 + 26{,}0 \,.\, m \\ \log\,(u_0 - \theta_0) &= 1{,}82282 + 35{,}75 \,.\, m \end{aligned}\right\}$$

hvoraf: $m = 0{,}00584$ og $\log(u_0 - \theta_0) = 2{,}02688$,
og heraf finde vi følgende Værdier for u, svarende til de forskjellige Maalerør:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.
u (observeret)	117,2° C.	104,4° C.	88,8° C.	71,6° C.	65,0° C.
u (beregnet)	121,4	104,9	88,1	73,5	64,3
Differents	—4,2	—0,5	0,7	—1,9	0,7

der ogsaa stemme ret godt med de observerede Temperaturer, undtagen for Maalerør Nr. 1, hvis observerede Temperatur synes at have været c. 4° for lav. — Da Vandføringen her var den samme som i sidste Tilfælde, saa finde vi:

$$m = 0{,}00584 = n\,.\,0{,}00455\,(1 + 0{,}05\,.\,H).$$

Naar vi fremdeles underkaste Forsøgene Nr. 20—23, Tab. X, en lignende Beregning, idet $\theta_0 = -1{,}5°$, saa finde vi følgende Ligninger:

$$\left.\begin{aligned}\log(u_0 - \theta_0) &= 1{,}89927 + 0{,}00\,.\,m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 1{,}74819 + 12{,}8\;\,.\,m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 1{,}58206 + 26{,}0\;\,.\,m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 1{,}47567 + 35{,}75\,.\,m\end{aligned}\right\},$$

og deraf erholdes: $m = 0{,}01194$, $\log(u_0 - \theta_0) = 1{,}89883$,
hvoraf vi let finde følgende Værdier for u:

Maalerør.	Nr. **1**.	**2**.	**3**.	**4**.	**5**.
u (observeret)	101,9° C.	77,8° C.	54,5° C	36,8° C.	28,3° C.
u (beregnet)	105,0	77,7	54,2	37,3	28,1
Differents	—3,1	0,1	0,3	—0,5	0,2

der atter stemme særdeles godt med de observerede Temperaturer, undtagen for Maalerøret Nr. 1, hvor den observerede Temperatur omtrent har været 3° for lav. Sætte vi:

$$m = 0{,}01194 = n\,.\,\frac{1 + 0{,}05\,.\,H}{70400}\,.\,\frac{D}{Q},$$

idet $D = 0{,}4'$, $Q = 0{,}00059$ Cbfd., altsaa $\frac{D}{Q} = 678$, saa finde vi:

$$0{,}01194 = n\,.\,0{,}00963\,(1 + 0{,}05\,.\,H).$$

Tage vi Middeltallene af Observationerne Nr. 24—25, Tab. XI, idet vi bemærke, at Lufttemperaturen var $\theta_0 = 0{,}9°$, saa erholde vi følgende Bestemmelsesligninger for m og $\log(u_0 - \theta_0)$

$$\left.\begin{aligned}\log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}06930 + 0{,}00 \,.\, m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}05346 + 12{,}8 \,.\, m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}04650 + 26{,}0 \,.\, m\\ \log(u_0 - \theta_0) &= 2{,}03623 + 35{,}75 \,.\, m\end{aligned}\right\},$$

som give: $m = 0{,}000885$ og $\log(u_0 - \theta_0) = 2{,}06789$,

og deraf findes følgende Værdier for u:

Maalerør.	Nr. 1.	2.	3.	4.	5.
u (observeret)	120,9° C.	118,2° C.	114,0° C.	112,2° C.	109,6° C.
u (beregnet)	120,4	117,8	114,8	111,8	109,6
Differents	0,5	0,4	—0,8	0,4	0

hvilke beregnede Temperaturer alle stemme med de observerede.

Sætte vi her, som i det Foregaaende,

$$m = 0{,}000885 = n \frac{1 + 0{,}05 \,.\, H}{70400} \cdot \frac{D}{Q}$$

og bemærke, at $D = 0{,}4'$, $Q = 0{,}0066$ Cbfd., altsaa $\frac{D}{Q} = 60{,}6$, saa finde vi:

$$0{,}000885 = n \,.\, 0{,}00086\,(1 + 0{,}05 \,.\, H).$$

Under disse sidste Forsøg blev Vindens Hastighed observeret at være c. 10 Fod pr. Sec., men da det derhos er bemærket om Veirforholdene, at »Luften var graa, men næsten ganske stille«, saa troer jeg at turde antage, at Vindens Virkning paa Apparatet i det Høieste har svaret til $H = 5$ Fod. Antage vi dette, saa finde vi:

$$0{,}000885 = 0{,}00108 \,.\, n, \text{ som giver:}$$

$$n = \frac{5}{6}.$$

Benytte vi denne Værdi for n, saa finde vi i Henhold til det Udviklede følgende Værdier for Vindens Hastighed:

1. Under Forsøgene Nr. 1—8 . . . . . $H = 13{,}6$ Fod
2. — Nr. 9—12 . . . . $H = 4{,}0$ —
3. — Nr. 13—15 . . . . $H = 8{,}3$ —
4. — Nr. 16 . . . . $H = 9{,}8$ —
5. — Nr. 17—19 . . . . $H = 11{,}2$ —
6. — Nr. 20—23 . . . . $H = 9{,}8$ —
7. — Nr. 24—25 . . . . $H = 4{,}7$ —

hvilke Værdier alle ligge indenfor Sandsynlighedens Grændser; men jeg skal dog ikke nægte, at jeg anseer det for muligt, ja endog for sandsynligt, at n ligger Eenheden endeel nærmere, end her er angivet.

Derimod troer jeg nu, at det fuldstændigt er blevet beviist, at, naar en varm Strøm ledes igjennem en Jernledning, vil Temperaturen af Vædsken, som i Tiden t har gjennemløbet Længden x af Ledningen, nøiagtigt være fremstillet ved Formlen (28), naar denne Temperatur ligger mellem Grændserne 0 og 125 Grader Celsius; og af den fuldkomne Overeensstemmelse imellem Formlen (28) og Observationerne i dette Interval maa jeg derhos slutte, at bemeldte Formel sandsynligviis stemmer med Erfaring for meget høiere Temperaturer end 125°.

Men naar Varmen, der udstrømmer igjennem en Rørledning, følger den Newtonske Lov, naar Vandet er i Bevægelse, saa maa Varmetabet ved denne Rørledning, i Tilfælde af at Vandet ikke er i Bevægelse, som alt tidligere bemærket, ogsaa følge Newtons Lov, og for at prøve, om dette stadfæstedes af Naturen, blev den 8de Forsøgsrække, som findes i Tab. III., udført med den 1 Tom. Ledning. Da denne Forsøgsrække imidlertid ikke kunde klare Spørgsmaalet, fandt jeg mig foranlediget til at gjøre nogle directe Forsøg med den 4 Tom. Vandledning, og Resultatet af disse Forsøg har jeg fremstillet i Forsøgs-Rækkerne X. a. og X. b.

Den første af disse Forsøgsrækker blev udført ved Maalerøret Nr. 2. Bestemmes Differentstemperaturen $(u - \theta_0)$ svarende til de forskjellige Værdier for T_1 og de tilsvarende Værdier af $\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right)$, idet vi for Udgangstemperaturen u_0 sætte den Værdi, som svarer til $T_1 = 0$, saa vil det være let at bestemme Forholdet f mellem T_1 og $\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right)$ svarende til de forskjellige Værdier af T_1, hvorefter Loven for Temperaturens Aftagelse med Tiden vil være:

$$T_1 = \mathrm{f}\,.\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

hvor f skal være Constant, i Henhold til Newtons Lov. Men udføre vi Beregningerne, saa viser det sig, at Forsøgsrækken X. a. giver følgende sammensvarende Værdier:

T_1	0	0,5	2	3,5	5	8	11	14	17	22
$(u - \theta_0)$	119,3	118,7	115,9	113,6	111,6	108,2	104,2	100,8	97,0	91,7
$\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right)$	0	0,0022	0,0126	0,0213	0,0290	0,0424	0,0588	0,0732	0,0899	0,1143
f	$\frac{0}{0}$	227	159	164	173	188	187	191	189	192
T_1	27	37	47	62	77	92	107	139	182	227
$(u - \theta_0)$	87,1	79,1	71,4	61,9	53,5	46,7	40,7	30,3	20,8	14,4
$\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right)$	0,1366	0,1785	0,2229	0,2849	0,3483	0,4073	0,4670	0,5952	0,7586	0,9183
f	198	207	211	217	221	226	229	234	240	247

En lignende Beregning udført med Hensyn til Forsøgsrækken X. b. giver følgende Resultat:

T_1	0	1,5	3	4,5	7	10	13	16	19	24
$(u-\theta_0)$	114,5	106,4	105,0	103,0	100,0	96,2	93,1	89,7	86,7	81,7
$\log\left(\frac{u_0-\theta_0}{u-\theta_0}\right)$	0	0,0319	0,0376	0,0460	0,0588	0,0757	0,0899	0,1061	0,1208	0,1466
f	$\frac{0}{0}$	47	80	98	119	131	144	151	157	164
T_1	29	39	49	64	79	94	109	141	184	229
$(u-\theta_0)$	77,5	70,1	63,2	54,1	46,3	40,5	35,0	26,2	17,9	12,2
$\log\left(\frac{u_0-\theta_0}{u-\theta_0}\right)$	0,1695	0,2131	0,2581	0,3256	0,3932	0,4513	0,5147	0,6405	0,8060	0,9725
f	171	183	190	197	201	208	212	220	228	235

Af disse tvende Rækker af Forsøg fremgaaer det uventede Resultat, at f ikke er constant saaledes som naar Vandet strømmer igjennem Vandledningen. Tværtimod see vi, at f voxer regelmæssigt med Tiden, naar undtages det første Forsøg i Rækken X. a., som jeg ikke tør tillægge nogen sær Betydning imod alle de øvrige Forsøg, og væsentligt, fordi en lille Observationsfeil her vil have en mærkelig Indflydelse paa Resultatet.

Af Formlen (31) kunne vi let bestemme den Hastighed, hvormed Temperaturen aftager til enhver af de Tider, paa hvilke Observationerne ere udførte. Ved nemlig at differentiere Formlen (31) finde vi denne Hastighed at være:

$$\left(-\frac{du}{dt}\right) = \frac{2{,}3036}{\mathrm{f}}\,(u-\theta_0);$$

og for at erholde Temperaturtabet pr. Minut behøve vi kun heri at indsætte den observerede Værdi for u samt den i foranstaaende tvende Tabeller angivne tilsvarende Værdi for f. Men gjøre vi dette, saa viser det sig tydeligt, at Temperaturtabet voxer i et meget stærkere Forhold, end proportional med Differentstemperaturen alene. Dette stemmer altsaa overeens med Resultatet af Dulongs og Petits Forsøg, og Overeensstemmelsen er større, end man maaskee venter. Betragtes f. Ex. Forsøgsrækken X. a. og sammenstille vi Resultaterne deraf med Resultaterne af en Række af Forsøg, som Dulong og Petit have udført i atmosphærisk Luft af 20° Varme og 720^{mm} Tryk*), saa erholde vi følgende Oversigtstabel over Temperaturtabene pr. Minut ved forskjellige Temperaturer:

*) Da det ikke har været mig muligt at erholde Dulongs & Petits originale Afhandling i Ann. de Chemie & de Physique, saa har jeg anført denne Række af Forsøg efter Pogg. Ann. d. Physik B. 84. S. 134.

$(u - \theta_0)$.	f.	Temperaturtabet pr. Minut ifølge		Anmærkning.
		Forsøgsrækken X. a.	Dulongs & Petits Forsøg.	
116° C.	160	1,66° C.	6,46° C.	I Dulongs & Petits Forsøg var $(u - \theta_0)$ ikke 116° men 120°.
100°	191	1,20°	4,99°	
80°	206	0,90°	3,77°	
60°	216	0,64°	2,61°	
40°	230	0,40°	1,60°	
20°	240	0,19°	0,71°	

Heraf fremgaaer altsaa, at, med den Forskjel, at Dulongs & Petits Temperaturtab heelt igjennem ere omtrent 4 Gange større end det, som jeg har fundet, er Loven for Varmens Aftagelse med Temperaturen næsten ganske den samme, som den de have fundet. Erindres det nu, at Dulong og Petit experimenterede med store Thermometerkugler, imedens jeg har arbeidet med en Cylinder, men at den opvarmede Vædske, som i det ene Tilfælde var Qviksølv og i det andet Tilfælde var Vand, i begge Tilfælde var i Hvile, saa troer jeg heri at finde Nøglen til Forklaringen af den Uovereensstemmelse, som finder Sted imellem de Resultater, som jeg i det Foregaaende har udviklet, og dem, som Dulong og Petit have fundet, og jeg haaber, at det i det Følgende skal lykkes mig at paavise, at, naar den Newtonske Lov er rigtig, saa maa der vise sig en saadan Forskjel, som den vi her have seet. Betænke vi nemlig, at det er blevet beviist, at under permanente Temperaturforhold er den i en Tidseenhed udstrømmende Varmemængde stedse proportional med Differentsen mellem Rørledningens og den, samme omgivende Lufts Temperatur, saa er det, som jeg oftere har bemærket, ogsaa utvivlsomt, at Varmetabet i alle Tilfælde maa være proportionalt med Differentstemperaturen imellem Rørledningen og den omgivende Luft, uden Hensyn til Vandets Bevægelse i Ledningen; thi den eneste Indvirkning, som en saadan Bevægelse kan udøve med Hensyn paa Varmeforholdene, er aabenbart den, at Vanddelene stadigt blandes imellem hinanden saaledes, at Temperaturen af hele Vandmassen derved bliver mere eensformig og Varmen ved Ledningens Overflade bliver større end ved Stilstand af Vandet i Ledningen. Fandtes der en Vædske, som havde en uendelig stor Varmeledningsevne, saa maatte Varmen øieblikkelig fordele sig eensformigt over samme, og tænke vi os et saadant Fluidum at gjennemstrømme Rørledningen, saa maatte Temperaturen i alle Punkter være ligestor uafhængig af Varmestrømmen; men et saadant Legeme er hverken Vand eller Qviksølv, som begge tabe mere og mere i Varme efterhaanden som den gjennemløbne Deel af Rørledningen er større, og jeg kan tilføie: et saadant Legeme existerer ikke; thi det er bekjendt, at selv vore bedste Varmeledere frembyde en ikke ringe Modstand imod

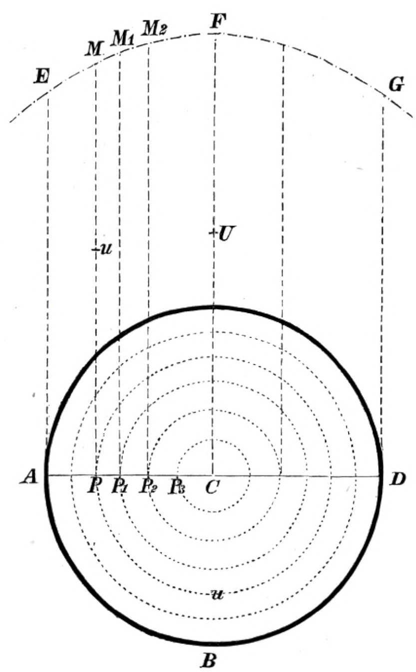
Varmens Forplantelse. Da Varmeledningsevnen altsaa er endelig for alle Legemer og for Vandet forholdsviis er temmelig lille, saa aftager Temperaturen ikke alene med den af Vandet gjennemløbne Vei, men ogsaa fra det Indre af Strømmen ud imod Røroverfladen, der omgiver Strømmen. Naar Vandet circulerer i Ledningen, ville naturligviis Temperatur-Ulighederne i hvert enkelt Tværsnit være, mindre end naar Vandet staaer stille i Ledningen, idet Vanddelene ved Bevægelsen stadigt blandes mellem hinanden, og Bevægelsen vil altsaa have samme Indflydelse, som om den forøgede Varmeledningsevnen, og omvendt vil en øieblikkelig Standsning af Vandstrømmen have samme Virkning, som om Vandets Varmeledningsevne blev formindsket.

Tænke vi os nu Vandet i Ledningen at være i Hvile, og Afkjølingen at være ligestor i alle Retninger omkring Rørledningen, saa er det klart, at der vil strømme Varme ud til alle Sider fra Ledningens Axe lodret imod Røroverfladen. Men tænke vi os en med den givne Røroverflade concentrisk Cylinderflade, hvis Radius er r, lagt igjennem den i Røret indesluttede Vandmasse, saa maa den Varmemængde, som i en Tidseenhed strømmer ud igjennem denne Cylinderflade, være ligestor med den Varmemængde, som den Vandmasse, der begrændses af denne Cylinderflade, afgiver i samme Tid, og forudsætte vi endvidere, hvad stedse med Tilnærmelse kan antages, naar Nedsvalingen har fundet Sted i nogen Tid, at alle Punkter af hele Vandmassen tabe ligemegen Varme i lige Tid, saa er det ligefrem indlysende, at den Varmemængde, som i en Tidseenhed passerer den omtalte Cylinderflade, hvis Radius $= r$, maa være proportional med r^2; men da denne Overflades Størrelse kun voxer proportionalt med r, saa maa Varmestrømmens Hastighed følgelig ogsaa voxe proportionalt med r. Ved at sammenholde dette med den Poissonske Formel (C), vil det være indlysende, at, naar k er constant, saa maa vi tilnærmelsesviis have $-\frac{du}{dr} = A \,.\, r$ og som en Følge heraf:

$$u = U - A \,.\, r^2,$$

idet U betegner Temperaturen i Ledningens Axe og A er en Størrelse, som er uafhængig af r. Men heraf fremgaaer, at, naar vi tænke os et vilkaarligt Tværsnit paa Ledningen fremstillet ved Cirklen ABD, hvis Centrum, svarende til Ledningens Axe, er beliggende i Punktet C, og vi dernæst paa en vilkaarlig Diameter ACD i forskjellige Punkter $A, C, D, P, P_1, P_2, \ldots$

Fig. 3.



opreise lodrette Linier AE, CF, DG, PM, P_1M_1, P_2M_2, ... hvis Længder fremstille Temperaturerne i disse Punkter, saa vil den Curve, som forbinder alle Endepunkterne E, M, M_1, M_2, F, G, være en Parabel, hvis Toppunkt F ligger i den Linie $CF = U$, som fra Centrum opreises lodret paa ACD.

Tænke vi os nu Vandets Varmeledningsevne pludselig at blive forøget, saa er det indlysende, at, da Varmemængden bliver den samme, saa vil Temperaturen CF formindskes og Temperaturen $AE = GD$ forøges, og samtidigt hermed vil naturligviis Temperaturen af de Vanddele, som ligge indenfor en vis Afstand PC, formindskes, medens Temperaturen af alle de Vanddele, som ligge udenfor denne Afstand, vil forøges. De Vanddele, som netop befinde sig i Afstanden PC ville naturligviis beholde deres Temperatur uforandret. Jo større Varmeledningsevnen bliver, desto fladere bliver altsaa Parablen og desto større bliver følgelig Parablens Parameter, og omvendt, jo mindre Varmeledningsevnen bliver, desto mindre bliver ogsaa Parametren. Parablens Parameter $\frac{1}{A}$ voxer altsaa med Varmeledningsevnen, fra 0 til ∞, og betegne vi denne Parameter, betragtet som Function af Varmeledningsevnen k, ved $f(k)$, saa kan foranstaaende Ligning skrives:

$$r^2 = f(k)\,(U - u).$$

Da vi nu i det Foregaaende have seet, at Vandstrømmens Hastighed forøger Varmeledningsevnen (k) eller, rettere talt, virker, som om den forøgede denne, saa er det klart, at Parablens Parameter voxer og aftager med Strømhastigheden.

Tænke vi os for et Øieblik r at være Radius til Ledningens Overflade og u at være Temperaturen ved denne Overflade, saa er det indlysende, at, da r bliver uforandret, hvilke Værdier man end tillægger Vandstrømmens Hastighed V og dermed k, saa maa $(U - u)$ voxe, naar V aftager. Antage vi, at Vandledningen har en given constant Vandføring, og at alle Punkter af Strømmen befinde sig i en permanent Temperaturtilstand, samt at vi i et vist Øieblik aflukke for Vandet og derved sætte $V = 0$, saa vil k aftage til (k_1) og $f(k)$ aftage til $f(k_1)$, hvoraf nødvendigviis følger, at $(U - u)$ maa voxe. Men da U istedetfor at voxe tværtimod vil aftage, saa er det aabenbart, at u maa aftage i et endnu stærkere Forhold, end U. I et Øieblik kan dog $(U - u)$ ikke naae den Værdi, som tilfredsstiller Ligningen $f(k_1)(U - u) = r^2$, eftersom den Varme, der udstrømmer igjennem Ledningens Overflade, ved en given Differents imellem Rørledningens Temperatur u og Lufttemperaturen θ_0, er en bestemt Størrelse, og det vil derfor medtage en vis Tid τ inden $(U - u)$ naaer sin Grændse og k bliver forandret til k_1. Fra det Øieblik, Afløbshanen for Vandet lukkes, er altsaa $\frac{dU}{dt} < \frac{du}{dt}$ og først efterhaanden nærme disse Størrelser sig hinanden, indtil de, efter Forløbet af en vis Tid τ, blive ligestore. Men af den Omstændighed, at u aftager i et stærkere Forhold end U, fra det Øieblik at Afløbshanen lukkes, følger ligefrem, at $(u - \theta_0)$ og dermed den igjennem Rørledningen udstrømmende Varmemængde til ethvert Tidspunkt t maa være mindre end hvis U og u stadigt havde aftaget lige meget.

I hvert enkelt Øieblik kunne vi med Tilnærmelse antage, at, naar Varmeledningsevnen er bleven constant i Rørledningen, saa ville alle de Punkter af Vandmassen, som befinde sig i samme Tværsnit, tabe lige megen Varme i lige Tid; men det er paa den anden Side, let at indsee, at efterhaanden, som Vandmassen afgiver sin Varme, maa ogsaa Parametren voxe, idet Varmetabet i lige Tid aftager, naar Temperaturen aftager. Parablens Parameter maa altsaa være en Function af Nedsvalingstiden, og være voxende med denne, eller, om man vil, en Function af $(U - \theta_0)$, som voxer fra 0 til ∞, naar $(U - \theta_0)$ aftager fra ∞ til Nul, og i Henhold hertil maa Ligningen for Parablen med Tilnærmelse kunne skrives:

$$r^2 = \frac{f(k)}{U - \theta_0}(U - u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

som opløst med Hensyn paa u giver:

$$u = U - \frac{r^2}{f(k)}(U - \theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Tænke vi os da, at Vandet strømmer igjennem Rørledningen med en constant Hastighed, at Varmeledningsevnen for Vandet under denne Hastighed er k og at Ledningen forøvrigt befinder sig under permanente Temperaturforhold, saa vil et Thermometer, som anbringes i Afstanden r fra Ledningens Axe angive Temperaturen u, naar Temperaturen i Centrum er U.

Tænke vi os dernæst, at der i et givet Øieblik aflukkes for Vandet og at vi paa en eller anden Maade forhindre, at Varmeledningsevnen k forandrer sig under Vandets Nedsvaling, saa vil Temperaturen U aftage til θ_0 i Løbet af en vis Tid og samtidigt vil u aftage til θ_0 efter den Lov, som er fremstillet i Formlen (33). Et saadant Tilfælde indtræder, naar vi, istedetfor at aflukke for Vandet, observere Vandets Temperatur under dets Bevægelse igjennem en længere Rørledning paa forskjellige Steder. Men tænke vi os derimod, at Vandet standses i dets Flugt, altsaa at V bliver Nul, saa vil Varmeledningsevnen i en vis Tid τ aftage fra k til k_1 og samtidigt vil $f(k)$ aftage til $f(k_1)$. I det Hele taget er Tiden, hvori Temperaturen U gjennemløber alle Værdierne fra $U = U$ til $U = \theta_0$, som vi have seet, lidt større, end naar Varmeledningsevnen bliver uforandret $= k$, men i Gjennemsnit kunne vi foreløbigt uden mærkelig Feil betragte U som aftagende paa ganske samme Maade, som naar k er constant, og sammenligne vi da de til samme Værdi af U svarende Værdier af u i de to Tilfælde, hvor Varmeledningsevnen er k og k_1, saa finde vi, naar disse betegnes ved u og u_1, at:

$$(u - u_1) = \left(\frac{r^2}{f(k_1)} - \frac{r^2}{f(k)}\right)(U - \theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

og heraf fremgaaer, at, naar vi observere Temperaturen til forskjellige Tider i disse to Tilfælde, saa maa det vise sig, at Differentsen $(u - u_1)$ voxer fra det Øieblik, da Afløbshanen bliver lukket, indtil Varmeledningsevnen er aftaget til k_1, men fra dette Øieblik, indtil U bliver $= \theta_0$, aftager $(u - u_1)$ atter indtil Nul.

Vi ville nu undersøge, hvorvidt Forsøgene stemme hermed eller ikke. Da de foreliggende 2de Forsøgsrækker X. a. og X. b. bleve udførte umiddelbart efter at Forsøgene Nr. 1 til 8 vare sluttede og under de derved beskrevne Veirforhold, saa vil en Sammenligning imellem deres Resultater og Formlen:

$$\log (u - \theta_0) = 2{,}08718 - 0{,}001167 \,.\, x,$$

som vi tidligere have seet, stemmer særdeles nøie med Forsøgene Nr. 1 til 8, tjene til at belyse det foreliggende Spørgsmaal. Vi maae da først erindre, at, da Vandføringen under Forsøgene Nr. 1 til 8 var $Q = 0{,}0068$ Cbfod. pr. Sec., og da den indvendige Diameter af det 4 Tom. Rør var $= 0{,}325$ Fod, altsaa Strømmens Tværsnitsareal $\frac{1}{4}\, d^2\pi = 0{,}08294 \,\square$ Fod, saa var Vandstrømmens Hastighed $V = 0{,}082$ Fod pr. Secund. Men da

$$x = V \,.\, T = 0{,}082 \,.\, T,$$

saa finde vi let, at

$$\log (u - \theta_0) = 2{,}08718 - 0{,}0000957 \,.\, T$$

eller, naar Tiden T udtrykkes i Minuter,

$$\log (u - \theta_0) = 2{,}08718 - 0{,}00574 \,.\, T.$$

Men dernæst maae vi tillige erindre, at, da det under de foreliggende Forsøg ikke alene var Vandet, men ogsaa selve Rørledningen, som afgav sin Varme, saa vil det ogsaa være nødvendigt ifølge Formlen (29) at bestemme den Tid T_1, som den samlede Masses Nedsvaling udkræver. Det bemærkes i denne Henseende, at Vægten af selve Rørledningen var 855 ℔, og at Vægten af den deri indesluttede Vandmasse var 243,4 ℔. Sætte vi endvidere Jernets specifiske Varme $= 0{,}110$, saa erholde vi ifølge (29):

$$T_1 = 1{,}3864 \,.\, T$$

og indsætte vi den heraf følgende Værdi for T i Ligningen ovenfor, saa finde vi:

$$\log (u - \theta_0) = \log (u_0 - \theta_0) - 0{,}00414 \,.\, T_1 \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (35)$$

Ved Hjælp af denne Formel kunne vi nu beregne de Værdier af $(u - \theta_0)$, som vilde vise sig til forskjellige Tider, naar Varmeledningsevnen blev uforandret og Temperaturtabet stedse var proportionalt med Differentstemperaturen $(u - \theta_0)$, og foretage vi en saadan Beregning for de Tidspunkter, som ere angivne i Forsøgsrækken X. a., idet vi sætte Udgangstemperaturen $(u_0 - \theta_0) = 119{,}3°$, saa finde vi de Værdier af $(u - \theta_0)$, som kunne sammenlignes med de tilsvarende observerede Temperaturer, hvilke jeg vil betegne med $(u_1 - \theta_0)$, og derved vil det da vise sig, om Differentsen $(u - u_1)$ mellem disse følger den Lov, som er udtrykt ved Formlen (34). Resultaterne af en saadan Beregning og Sammenstilling findes i efterfølgende Tabel, hvori T_1 er udtrykt i Minuter.

T_1	0	0,5	2	3,5	5	8	11	14	17	22
$(u - \theta_0)$	119,3°	118,73	117,05	115,40	113,75	110,54	107,43	104,40	101,50	96,73
$(u_1 - \theta_0)$	119,3	118,7	115,9	113,6	111,6	108,2	104,2	100,8	97,0	91,7
$(u - u_1)$	0	0,03	1,15	1,80	2,15	2,34	3,23	3,60	4,50	5,03
T_1	27	37	47	62	77	92	107	139	182	227
$(u - \theta_0)$	92,23	83,85	76,21	66,06	57,26	49,63	43,02	31,71	21,05	13,70
$(u_1 - \theta_0)$	87,1	79,1	71,4	61,9	53,5	46,7	40,7	30,3	20,8	14,4
$(u - u_1)$	5,13	4,75	4,81	4,16	3,76	2,93	2,32	1,41	0,25	—0,7

Ved at betragte Differentsen $(u - u_1)$ mellem den efter Newtons Formel beregnede og den observerede Temperatur, viser det sig, at den voxer i Løbet af en halv Times Tid, fra Nul til 5,13°, samtidig med at $(u_1 - \theta_0)$ aftager fra 119,3° til 87,1°; men derefter aftager $(u - u_1)$ fra 5,13° til Nul, medens $(u_1 - \theta_0)$ aftager fra 87,1° til omtrent 20°, og bliver derpaa negativ. Dette stemmer saaledes med den omtalte Betragtning, ifølge hvilken Afvigelsen fra den Newtonske Lov hidrører fra den ulige Varmeledningsevne, hvormed Vandet fremtræder, eftersom det er i Bevægelse eller i Hvile; thi $(u - u_1)$ er ikke blot i Harmoni med Formlen (34), men den viser tillige, at, skjøndt Afkjølingshastigheden i Begyndelsen er større end efter Newtons Lov, saa medtager den fuldstændige Afkjøling af Ledningen dog længere Tid, end om Afkjølingen helt igjennem havde fulgt denne. Hvis derimod Temperaturen virkelig sank hurtigere i alle Punkter af Massen, end efter den Newtonske Lov, saa vilde $(u - u_1)$ bestandig være en positiv Størrelse, idet u_1 stedse vilde være mindre end u og blive Nul en Tid før u.

Dette stadfæstes yderligere ved Forsøgsrækken X. b., som blev udført ved Maalerøret Nr. 4, der ligeledes var anbragt i den 4 Tom. Ledning. Foretage vi nemlig en ganske tilsvarende Beregning for dette Maalerør, idet vi sætte $(u_1 - \theta_0) = 114{,}5°$, saa finde vi følgende sammenhørende Værdier for T_1, $(u - \theta_0)$, $(u_1 - \theta_0)$ og $(u - u_1)$:

T_1	0	1,5	3	4,5	7	10	13	16	19	24
$(u - \theta_0)$	114,5°	112,8	111,3	109,7	107,1	104,1	101,2	98,3	95,5	91,1
$(u_1 - \theta_0)$	114,5	106,4	105,0	103,0	100,0	96,2	93,1	89,7	86,7	81,7
$(u - u_1)$	0	6,4	6,3	6,7	7,1	7,9	8,1	8,6	8,8	9,4
T_1	29	39	49	64	79	94	109	141	184	229
$(u - \theta_0)$	86,8	79,0	71,9	62,2	53,9	46,7	40,5	29,9	19,8	13,0
$(u_1 - \theta_0)$	77,5	70,1	63,2	54,1	46,3	40,5	35,0	26,2	17,9	12,2
$(u - u_1)$	9,3	8,9	8,7	8,1	7,6	6,2	5,5	3,7	1,9	0,8

Heraf see vi nemlig, at Temperaturen lige i Begyndelsen efter Aflukningen synker meget hurtigere end efter den Newtonske Lov og at først efter henimod en halv Times Forløb bliver Afkjølingshastigheden af den Størrelse, som svarer til denne Lov. Fra denne Tid nærmer u_1 sig til u, og betragte vi den Maade, paa hvilken $(u - u_1)$ aftager i Sammenligning med $(u - \theta_0)$, saa viser denne Sammenstilling let, at $(u - u_1)$ bliver negativ, før Nedsvalingen er fuldendt. Begge disse Rækker af Forsøg synes altsaa ganske at bekræfte den i det Foregaaende udviklede Tanke, at den iagttagne Afvigelse fra den Newtonske Lov er et blot tilsyneladende Phænomen.

Da Temperaturen af Vandet i Ledningen, i Henhold til det saaledes Udviklede, skulde aftage i en mærkelig Grad indefra udad til mod Ledningens Overflade, saa besluttede jeg mig til at foretage en Forandring med Maalerøret Nr. 3, hvorved jeg kunde blive istand til at maale Varmegraden i forskjellige Dybder af det 6″ Rør GH Fig. 2. Jeg lod til den Ende det gamle Maalerør udtage og et nyt Maalerør Nr. 3 indskrue i dets Sted. Dette nye Rør, der indvendig havde en Længde af $5\frac{3}{4}$ Tom., og forøvrigt havde samme Dimensioner og samme Construction, som det ældre Maalerør, blev indskruet saa dybt i det 6 Tom. Rør, at Overkanten kun ragede $1\frac{1}{8}$ Tomme op over Rørledningen, hvorved Overfladen af Bunden i Maalerøret altsaa laae $4\frac{5}{8}$ Tom. under den ydre Overflade af det 6″ Rør. I dette Maalerør fyldtes $2\frac{5}{8}$ Tom. Qviksølv, hvori jeg kunde anbringe Thermometret i forskjellige Dybder og derved observere Temperaturen af Qviksølvet i disse Dybder. Paa denne Maade kunde jeg vel ikke være ganske vis paa, at den observerede Temperatur nøiagtig var ligestor med den, som Vandet havde paa det tilsvarende Punkt i Ledningen, men paa den anden Side kunde jeg derimod være fuldkommen sikker paa, at de observerede Temperaturdifferentser ikke overstege dem, som virkelig fandt Sted i Vandet. Efter at Forandringen var fuldført, udførte jeg først de tidligere anførte Forsøg Nr. 24 og 25, under en Vandføring af 15 Potter i 71 Sec. og ved en Lufttemperatur af + 0,9°, idet Thermometret anbragtes i den tidligere sædvanlige Dybde. Da disse Observationer vare tilende udførte jeg følgende Række af Forsøg over Temperaturen af Qviksølvet i forskjellige Dybder under aldeles uforandrede Forhold og navnlig under samme Vandføring.

Tabel XII.

Forøgsrækken XVI.

Forsøgs-Nummer.	Dybden af Thermometrets nederste Punkt under Maalerørets Overkant.					
	$3\frac{1}{4}$″	$3\frac{3}{4}$″	$4\frac{1}{4}$″	$4\frac{3}{4}$″	$5\frac{1}{4}$″	$5\frac{3}{4}$″
26	115,0°	114,7°	114,2°	113,8°	113,0°	112,0°
27	114,7	114,2	113,9	113,2	112,6	111,7
28	114,0	114,0	113,6	113,0	112,3	111,4
29	114,6	114,2	114,0	113,4	112,7	111,3
30	114,4	114,3	114,3	113,8	113,0	111,5
Middeltal =	114,5°	114,3°	114,0°	113,4°	112,7°	111,6°

Da denne Række af Forsøg henimod Kl. $2\frac{3}{4}$ Efterm. var tilendebragt, blev Afløbshanen N heelt aflukket og altsaa Vandføringen standset. Fra dette Øieblik sank naturligviis Temperaturen i alle Punkter af Rørledningen, og imidlertid udførte jeg efterfølgende Række af Observationer for at komme til Kundskab om Varmetabet i forskjellige Dybder af Maalerøret Nr. 3.

Naar Tiden t, udtrykt i Minuter, regnes fra det Øieblik, da Afløbshanen blev lukket, saa kan Resultatet af Forsøgsrækken XVII fremstilles i efterfølgende

Tabel XIII.

Maalerøret Nr. 3. Temperaturen af Qviksølvet i en Dybde af $3\frac{1}{4}$ Tom. under Ledningens Overflade.

$t =$	0	2	4	8	13	17	20	23
$u =$	114,5° C.	113,4° C.	111,6° C	108,2° C.	105,0° C.	101,8° C.	99,5° C.	97,0° C.
$t =$	30	39	42	49	108	183		
$u =$	90,8° C	84,8° C.	83,7° C.	79,9° C.	55,0° C.	35,0 °C.		

Maalerøret Nr. 3. Temperaturen af Qviksølvet i en Dybde af $4\frac{1}{4}$ Tom. under Overfladen.

$t =$	0	12	15	$30\frac{1}{2}$	$48\frac{1}{2}$	108	183
$u =$	113,8° C.	105,0° C.	101,9° C.	89,5° C.	79,3° C.	54,9° C.	34,5° C.

Maalerøret Nr. 3. Temperaturen af Qviksølvet i en Dybde af $5\frac{3}{4}$ Tom. under Overfladen.

$t =$	0	1	3	6	9	11	16	18
$u =$	111,6° C.	109,4° C.	108,4° C.	106,6° C.	104,1° C.	103,0° C.	98,3° C.	96,7° C.
$t =$	19	24	31	40	43	48	108	
$u =$	96,0° C.	92,2° C.	86,0° C.	81,9° C.	80,0° C.	77,1° C.	52,7° C.	

Temperaturen af Qviksølvet i Maalerøret Nr. 2.

$t =$	0	7	14	183 Minuter.
$u =$	118,9° C.	110,2° C.	102,0° C.	33,6° C.

Til Oplysning over Temperaturforholdene i samtlige Maalerør ved Forsøgenes Slutning tjener følgende Observation:

Maalerør.	Nr. **1**.	Nr. **2**.	Nr. **3**.	Nr. **4**.	Nr. **5**.
Temperaturen.	30,4° C.	33,6° C.	35,0° C.	33,5° C.	31,0° C., alle svarende til t = 183 Minuter.

Af Forsøgsrækkerne Nr. 26 til 30, der i det Hele stemme særdeles godt overeens, see vi først, at, selv naar Vandet er i Bevægelse igjennem Ledningen, er der, som jeg havde forudseet, en mærkelig Temperaturaftagelse i Strømmens forskjellige Elementer nedad imod Bunden, og idet vi bemærke, at Overkanten af Maalerøret Nr. 3 laae $4\frac{1}{2}$ Tomme over Axen af det 6 Tom. Jernrør, saa er det klart, at Resultatet af Observationen kan fremstilles som følger, idet + antyder, at Thermometrets nederste Punkt ligger over Ledningens Axe, og ÷, at det ligger under denne Axe.

1,25	0,75	0,25	—0,25	—0,75	—1,25 Tommer.
114,5°	114,3°	114,0°	113,4°	112,7°	111,6° C.

Heraf see vi, at den høieste Temperatur falder noget over Ledningens Axe, hvilket naturligviis har sin Grund i, at den kolde Luft strømmer op imod Ledningen fra neden efterhaanden som den opvarmede Luft stiger tilveirs, og derved forhindrer, at en saa stor Afkjøling kan finde Sted foroven som forneden. Hvis vi nu ville undersøge, om Temperaturen kan antages at aftage efter en Parabel, saaledes som jeg i det Foregaaende har troet at kunne slutte, saa er det indlysende, at denne Parabels Toppunkt maa falde over Ledningens Axe. Lad os antage, at Parablens Axe falder i Afstanden $= a$ fra Ledningens Axe, saa kan Parablens Ligning fremstilles:

$$(y + a)^2 = p\,(U - u),$$

idet y betegner Afstanden fra Ledningens Axe til det Punkt, hvis Temperatur efter Forløbet af Tiden t er $= u$, og U er Temperaturen i Parablens Axe til samme Tid. Indsætte vi de observerede Værdier for y og u, saa erholde vi følgende 6 numeriske Ligninger:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{25}{16} + \tfrac{5}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 114{,}5\,.\,p \\
\tfrac{25}{16} - \tfrac{5}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 111{,}6\,.\,p \\
\tfrac{9}{16} + \tfrac{3}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 114{,}3\,.\,p \\
\tfrac{9}{16} - \tfrac{3}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 112{,}7\,.\,p \\
\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 114{,}0\,.\,p \\
\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{2}\,a + a^2 &= p\,.\,U - 113{,}4\,.\,p
\end{aligned}\right\}$$

hvoraf p, a og U lade sig bestemme.

Ved herpaa at anvende den approximerede mindste Qvadratmethode, erholdes følgende Værdier for Størrelserne p, a og U:

$$p = 2{,}208,\quad a = -1{,}305,\quad \text{og}\quad U = 114{,}47,$$

saa at Parablens Ligning kan skrives:

$$(y - 1{,}305)^2 = 2{,}308\,(114{,}47 - u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Af denne Ligning see vi, at bemeldte Temperaturparabels Axe ligger 1,305 Tom. over Rørledningens Axe, og søge vi dernæst Temperaturerne for de forskjellige observerede

Dybder og sammenstille vi dem med de observerede Temperaturer, saa finde vi følgende Værdier for u, svarende til disse Dybder:

Afstand fra Ledningens Axe $= y$ . .	1,25″	0,75″	0,25″	—0,25″	—0,75″	—1,25″
Temperaturen u (beregnet)	114,47°	114,34°	113,99°	113,42°	112,64°	111,64°
Do. Do. (observeret)	114,5°	114,3°	114,0°	113,4°	112,7°	111,6°
Forskjel	+0,03°	—0,04°	+0,01°	—0,02°	+0,06°	—0,04°

En fuldkomnere Overeensstemmelse, end den, som her viser sig imellem de observerede og de beregnede Temperaturer, er næsten utænkelig, og vi tør derfor vel betragte det som beviist, at, selv naar Vandet er i Strømning igjennem Ledningen, saa indstiller Temperaturen sig, — naar denne først er bleven permanent, — saaledes, at den for et hvilketsomhelst Punkt af Strømmen kan fremstilles som Abscisse til en Paraboloide, hvis Abscisseaxe falder sammen med det Element af Strømmen, hvis Temperatur er et Maximum og som følgelig er beliggende i Strømmen, diametralt modsat det Element af Ledningens Overflade, hvor Afkjølingen er størst.

En Afvigelse herfra kunde tænkes at opstaae derved, at Vædsken paa Grund af dens ulige Opvarmning og den derved frembragte ulige Tæthed blev sat i Bevægelse. En saadan forstyrrende Bevægelse vil i Almindelighed neppe have stor Indflydelse undtagen maaskee, naar Ledningen er stor; thi i Reglen vil den største Afkjøling finde Sted fra neden af, og i dette Tilfælde, ville de mest afkjølede Dele af Fluidet stadigt findes nederst, og der vil da ikke være nogen Grund til Bevægelse forhaanden. Søge vi Temperaturen af Vandet i det øverste og nederste Punkt af Ledningen, saa finde vi, ifølge Formlen (36), respective $u = 113{,}22°$ og $107{,}16°$.

Naar det nu erindres, at vi i det Foregaaende have fundet, at der ved lige Temperaturforhold og lige Areal udstrømmer mindre Varme igjennem en 4 Tom. Støbejerns Ledning end igjennem en 1 Tom. Smedejernsledning, saa vil det af det her Udviklede være klart, at dette for en Deel kan have sin Grund i, at den observerede Temperatur i Midten af den 4 Tom. Ledning har været større end den, som fandtes ved Overfladen af Ledningen. Til Oplysning desangaaende bemærkes, at ifølge Poissons Formel (C) er Varmestrømmen $\Gamma = -k\dfrac{du}{dr}$ og at Formlen (33) ved Differentiation giver: $\left(-\dfrac{du}{dr}\right) = \dfrac{2}{f(k)}(U - \theta_0)\,.\,r$, hvoraf findes: $\Gamma = \dfrac{2k}{f(k)}r\,.\,(U - \theta_0)$; men da den Varmemængde Γ, som i en Tids-Eenhed strømmer igjennem en Overflade-Eenhed paa Rørledningen, er ligestor, uden Hensyn til Ledningens Diameter, naar Temperaturdifferentsen mellem Ledningen og den omgivende Luft er ligestor, saa kan Varmestrømmen Γ ikke være absolut, men kun relativt proportional med r. Betegne vi altsaa Radius til Overfladen ved R, saa maae vi have:

$$\Gamma = \frac{2k}{f(k)} \frac{r}{R} (U - \theta_0)$$

og altsaa $$\left(-\frac{du}{dr}\right) = \frac{2}{f(k)} (U - \theta_0) \cdot \frac{r}{R},$$ hvoraf igjen følger:

$$(U - u) = \frac{r^2}{R \cdot f(k)} (U - \theta_0) \text{ eller}$$

$$r^2 = \left(\frac{R \cdot f(k)}{U - \theta_0}\right) (U - u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Af denne Formel see vi, at den omtalte Temperatur-Parabels Parameter er:

$$\left(\frac{R \cdot f(k)}{U - \theta_0}\right),$$

og deraf følger, at Parablens Krumning er desto større, jo mindre Ledningens Radius er. Men antage vi $r = R$, altsaa at u er Temperaturen af Vandet ved Overfladen, saa erholde vi:

$$R = \frac{f(k)}{U - \theta_0} (U - u),$$

hvoraf sees, at, naar Ledninger af forskjellig Diameter, ved samme Temperaturdifferents $(U - \theta_0)$, sammenlignes, vil Varmedifferentsen $(U - u)$ være proportional med R, hvoraf blandt andet kan sluttes, at Differentsen imellem Temperaturen i det Indre af Strømmen og Temperaturen ved Overfladen for en 4 Tom. Ledning vil være 4 Gange større end for en 1 Tom. Ledning, naar Temperaturdifferentsen $(U - \theta_0)$ er lige i begge Tilfælde. Med Hensyn til Temperatur-Parablens Krumning ved Ledningens Overflade, da viser ovenstaaende Udtryk for $\frac{du}{dr}$, at denne nøiagtigt er ligestor, enten Radius til Ledningen er stor eller lille, naar blot $(U - \theta_0)$ er den samme.

Herfra ville vi nu gaae over til at betragte Forsøgsrækken XVII, som angiver Temperaturen af Qviksølvet i Maalerøret Nr. 3 svarende til forskjellige Dybder i det 6 Tom. Rør og navnlig til Afstanden: 1,25″ over Ledningens Axe,
0,25″ over — —
samt 1,25″ under — —
og til forskjellige Tider efterat Afløbshanen var lukket og Vandets Strømningshastighed var Nul. Under denne Række af Forsøg, som udførtes fra Klokken $2\frac{3}{4}$ til $5\frac{3}{4}$ Eftermiddag, var Lufttemperaturen 0,9° C. For at lette Oversigten har jeg ifølge Formlen (31) for hver af de angivne tre Dybder bestemt Coefficienten f, svarende til hvert af de angivne Tidspunkter, og Resultatet af denne Beregning vil man finde i efterfølgende trende Tabeller.

ad. Forsøgsrækken XVII. Temperaturen af Qviksølvet i 1,25 Tom. Afstand over Ledningens Axe.

T_1	0	2	4	8	13	17	20 Min.
$(u - \theta_0)$	113,6	112,5	110,7	107,3	104,1	100,9	98,6
$\log \frac{u_0 - u_0}{u - \theta_0}$	0	0,00423	0,01123	0,02478	0,03793	0,05149	0,06140
f	$\frac{0}{0}$	473	356	323	343	330	325
T_1	23	30	39	42	49	108	183 Min.
$(u - \theta_0)$	96,1	89,9	83,9	82,8	79,0	54,1	34,1
$\log \frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}$	0,07266	0,10162	0,13162	0,13735	0,15775	0,32218	0,52263
f	317	296	296	306	311	335	350

Temperaturen af Qviksølvet i 0,25 Tom. Afstand over Ledningens Axe.

T_1	0	12	15	$30\frac{1}{2}$	$48\frac{1}{2}$	108	183 Min.
$(u - \theta_0)$	112,9	104,1	101,0	88,6	78,4	54,0	33,6
$\log \frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}$	0	0,03524	0,04837	0,10526	0,15837	0,32030	0,52635
f	$\frac{0}{0}$	340	310	290	306	337	348

Temperaturen af Qviksølvet 1,25 Tom. under Ledningens Axe.

T_1	0	1	3	6	9	11	16	18 Min.
$(u - \theta_0)$	110,7	108,5	107,5	105,7	103,2	102,1	97,4	95,8
$\log \frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}$	0	0,00872	0,01274	0,02008	0,03047	0,03512	0,05559	0,06278
f	$\frac{0}{0}$	115	235	298	295	313	288	287
T_1	19	24	31	40	43	48	108 Minuter.	
$(u - \theta_0)$	95,1	91,3	85,1	81,0	79,1	76,2	51,8	
$\log \frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}$	0,06597	0,08368	0,11422	0,13567	0,14597	0,15220	0,32982	
f	288	275	271	295	295	315	327	

Her viser det sig atter, ligesom tidligere ved Forsøgsrækkerne X. a. og X. b., at f ikke er constant, saaledes som naar Vandet er i Strømning og Temperaturen er permanent, og vi see desuden, at Størrelsen f ikke varierer paa samme Maade i hele Vandmassen. Betragte vi de angivne tre Tabeller, idet det erindres, at Afkjølingstiden $T_1 = \mathrm{f}.\log\left(\frac{u_0 - \theta_0}{u - \theta_0}\right)$ voxer proportionalt med f, samt at Afkjølingshastigheden $\left(-\frac{du}{dT_1}\right) = \frac{2{,}3026}{\mathrm{f}}(u - \theta_0)$ aftager, naar f voxer, saa fremgaaer det klart, at, fra det Øieblik da Afløbshanen lukkes, aftager Temperaturen langsomst i og omkring det Punkt af Ledningen, hvis Temperatur er et Maximum og som svarer til den før omhandlede Temperatur-Parabels Toppunkt, og hurtigst i de Dele af Ledningen, som ligge Overfladen nærmest.

I Løbet af nogle Minuter finde vi Varmetabet i det Indre at være i stærk Tiltagen, hvorimod Varmetabet i det Ydre af Ledningen er i stærk Aftagen; men efterhaanden nærme begge disse Hastigheder sig saaledes imod hinanden, at Afkjølingshastigheden, efter en Tids Forløb, kan betragtes, som værende ligestor for alle Punkter af Massen.

Her have vi altsaa en erfaringsmæssig Bekræftelse paa Rigtigheden af den Fremstilling, som jeg i det Foregaaende har udviklet; men specielt skal jeg fremhæve, at, medens vi see Varmetabet for de Dele af Ledningen, som ligge nærmest ved Overfladen, at skride frem med Hastigheder, der stemme overeens med Dulongs og Petits Forsøg, saa følger Varmetabet i det Indre den modsatte Lov. Fra det Øieblik, da Afkjølningshastigheden er ligestor for alle Punkter af Massen, maa Varmetabet i en Tidseenhed atter, ligesom naar Temperaturforholdene ere permanente, følge den simple Newtonske Lov, der er fremstillet i Formlen (31), idet f er constant. Vi bemærke imidlertid, naar vi betragte Værdierne for f, i de tre Tabeller, at, skjøndt det er aabenbart, at de forskjellige Dybder give Værdier for f, der bestandig mere og mere nærme sig hinanden, og skjøndt Værdierne for f efter Forløbet af en halv Times Tid i det Hele ikke tiltage væsentligt med Afkjølingstiden, saa ere de dog ikke constante, men tværtimod meget bestemt, langsomt voxende med T_1. Men herved maa det bemærkes, at fra det Øieblik, Afløbshanen lukkes, til det Øieblik, da Temperaturen i Ledningens forskjellige Punkter er kommen i saadan Ligevægt, at Varmetabet kan betragtes som ligestort for alle Punkter af Massen, vil der medgaae en vis Tid τ, og det er altsaa først derefter at Varmetabet kan følge den Newtonske Lov (31). Betegne vi Temperaturen af Vandet i en given Dybde ved Enden af Tiden τ med u_0' saa kommer det an paa at vise, hvorvidt Ligningen

$$(T_1 - \tau) = \text{f} \,.\, \log \left(\frac{u_0' - \theta_0}{u - \theta_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

tilfredsstilles ved Forsøgene for constante Værdier af f. Til den Ende ville vi betragte Forsøgsrækken XVII. og derved søge at bestemme τ, f og u_0' idet vi foreløbig sætte:

$$\left.\begin{aligned} \tau + \text{f} \,.\, \log\,(u_0' - \theta_0) &= \alpha \text{ og} \\ T_1 &= \alpha - \text{f} \log\,(u - \theta_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Forsøgene over Temperaturen i Afstanden 1,25″ over Ledningens Axe, der ere angivne i den første af de tre anførte Rækker, give os da følgende Bestemmelsesligninger, naar vi gaae ud fra $T_1 = 30$:

$$\begin{aligned} 30 &= \alpha - \text{f} \,.\, 1{,}95376 \\ 39 &= \alpha - \text{f} \,.\, 1{,}92376 \\ 42 &= \alpha - \text{f} \,.\, 1.91803 \\ 49 &= \alpha - \text{f} \,.\, 1{,}89763 \end{aligned}$$

$$108 = \alpha - \mathrm{f}\,.\,1{,}73320$$
$$183 = \alpha - \mathrm{f}\,.\,1{,}53275$$

og ved Anvendelse af den approximerede mindste Qvadratmethode finde vi:

$$\mathrm{f} = 364{,}5 \text{ og } \alpha = 740{,}933,$$

som indsatte i Formlen (39) giver:

$$0{,}00275\,.\,\tau + \log\,(u_0{}' - \theta_0) = 2{,}03274.$$

Ved heri efterhaanden at indsætte:

$$\tau = 0; \quad 8; \quad 20; \quad 30; \quad 39; \quad 42; \quad 49; \quad 108; \quad 183$$

finde vi $(u_0{}' - \theta_0) = 107{,}8°;\ 102{,}5°;\ 95{,}0°;\ 89{,}2°;\ 84{,}2°;\ 82{,}7°;\ 79{,}1°;\ 54{,}4°;\ 33{,}8°$, og ved at sammenligne disse Værdier for $(u_0{}' - \theta_0)$ med de umiddelbart observerede, see vi, at i de første 30 Minuter ere de beregnede Temperaturer mindre end de observerede, men tillige, at fra denne Tid falde de beregnede Temperaturer sammen med de observerede og heraf kunne vi altsaa slutte, at τ meget nær maa være $= 30$ Minuter; bemærke vi nu derhos, at de to Formler (39) blive identiske, naar T_1 og u forandres til τ og $u_0{}'$, saa vil det tillige være klart, at Forsøgene fra $T_1 = \tau$ til $T_1 = 183$ fuldstændigt tilfredsstilles ved den simple Newtonske Formel:

$$T_1 = 364{,}5\,.\log\left(\frac{107{,}83}{u - \theta_0}\right).$$

Det staaer altsaa blot nu tilbage at vise, at for alle Værdier af T_1, som ere større end $\tau = 30$ Minuter, aftager Temperaturen med samme Hastighed i det Punkt af Vandmassen, som ligger i 1,25'' Dybde under Ledningen, som i det ovenfor betragtede Punkt, der ligger 1,25'' over Axen, eller, at fra Tiden $T_1 = \tau$ er $\mathrm{f} = 364{,}5$ for alle Punkter af Vandmassen. At dette er Tilfældet, er let at vise; vi behøve blot i Formlen (39) at sætte $\mathrm{f} = 364{,}5$ samt, i Overeensstemmelse med Tabellen, at sætte $T_1 = 31$ og $(u - \theta_0) = 85{,}1$, saa finde vi $\alpha = 364{,}5\,.\log 103{,}5$ og altsaa:

$$T_1 = 364{,}5\,.\log\left(\frac{103{,}5}{u - \theta_0}\right).$$

Men sætte vi heri efterhaanden:

$$T_1 = 31, \quad 40, \quad 43, \quad 48, \quad 108$$

saa finde vi $(u - \theta_0) = 85{,}1°,\quad 80{,}4°,\quad 78{,}9°,\quad 76{,}3°,\quad 52{,}3°$,

hvilke Værdier sammenlignede med de observerede Værdier af $(u - \theta_0)$, som findes i Tabellen, klarligen vise, at Forudsætningen, at Hastigheden $\frac{du}{dt}$ er constant for alle Dybder, er rigtig.

De Hovedresultater, som kunne uddrages af foranførte Undersøgelser, ere følgende:

1. Den Hastighed, hvormed Varmen udstrømmer igjennem Overfladen paa en fritliggende Rørledning, som gjennemstrømmes af varmt Vand, er proportional med den Varme-

grad, hvormed Temperaturen af Ledningens Overflade overskrider Temperaturen af det omgivende Medium, saaledes som Newton oprindelig har angivet.

2. Naar den Newtonske Lov er naturtro, saa er den Poissonske Formel (B), der ligefrem forudsætter hiin og egentlig staaer og falder med den Newtonske Lov, ogsaa paalidelig. Gaaende ud herfra finder man ved Hjælp af Formlerne (B) og (C) at, naar en horizontal, cylindrisk Jernledning, der har sin naturlige metalliske Overflade, gjennemstrømmes af en constant Strøm af varmt Vand under permanente Temperaturforhold, saa kunne Lovene for Varmens Fordeling langs ad Ledningen og Forplantelse fra denne til den omgivende Luft fremstilles ved Formlerne (21), (22), (23) og (25), der alle fuldstændigt bekræftes af Erfaring.

3. Naar Vandledningen ikke har ganske smaa transversale Dimensioner, saa aftager Temperaturen udad imod Ledningens Overflade med en Størrelse, der meget nær er proportional med Qvadratet af Afstanden fra et vist Punkt i Ledningen, hvori Temperaturen af Strømmen er et Maximum.

4. De Afvigelser fra den simple Newtonske Lov, som vise sig ved Rør, fyldte med stillestaaende Vand, og som i det Væsentlige ere overeensstemmende med Resultaterne af Dulongs og Petits Forsøg, synes at hidrøre fra visse pludseligt forandrede Varmelednings- og Afkjølings-Forhold, hvori Rørledningen sættes.

For nærmere at bestemme den Lov, hvorefter Temperaturen aftager udad mod Overfladen, maae vi betragte den almindelige Poissonske Formel for Varmens Bevægelse, der er fremstillet ved:

$$(A) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad v = \frac{k}{\varrho w}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Naar vi anvende denne Formel paa en Cylinder, som opvarmes ved en constant Strøm af varmt Vand i Overeensstemmelse med de af mig udførte Forsøg, saa bemærkes først, at, naar vi vælge z Axen parallel med Ledningens Axe og betegne Vandstrømmens Hastighed ved V, saa er z en bekjendt Function af Tiden t, som er fremstillet ved:

$$z = V \, . \, t.$$

Men naar vi dernæst betænke, at under alle disse Forsøg er Temperaturen i Retningen af Ledningens Axe saa langsomt varierende, at vi ikke kunne begaae nogen mærkelig Feil ved at antage $\frac{du}{dz} = 0$, saa er det klart, at Formlen (A) reducerer sig til følgende:

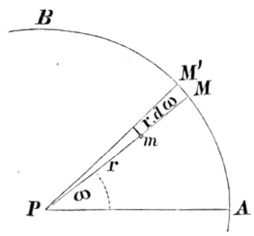
$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{\varrho w}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Tænke vi os da, at z Axen er lagt igjennem det Element af Strømmen, hvis Temperatur er et Maximum for hvert enkelt Tværsnit paa Ledningen, og indføre vi polære Coordinater r og ω istedetfor x og y, idet vi sætte $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, $x^2 + y^2 = r^2$, saa er: $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{x}{r}$, og $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{y}{r}$, og Ligningen for Varmens Bevægelse kan altsaa skrives:

$$\frac{du}{dt} = \frac{M^2}{r} \cdot \frac{d\left(r\,\frac{du}{dr}\right)}{dr}, \text{ idet } M^2 = \frac{k}{\varrho w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

At denne Ligning virkelig er Differentialligningen for Varmens Bevægelse i et vilkaarligt Tværsnit i Afstanden z, kunne vi overbevise os om ved følgende simple Betragtning. Lad P være det Punkt af Ledningen, omkring hvilket Varmen strømmer ud til alle Sider imod Legningens Overflade AMB. Temperaturen i det Punkt, hvis Coordinater ere r og ω, være u, og Temperaturen i det consecutive Punkt, hvis Coordinater ere $(r + dr)$ og ω, være samtidig $\left(u - \frac{du}{dr}dr\right)$. Differentsen mellem disse er $\frac{du}{dr}\,dr$, og

Fig. 4.



den Varmemængde, som i Tidselementet dt strømmer igjennem det uendeligt lille Element af Massen, hvis Overflade (for en Længde-Eenhed af Ledningen) er $= rd\omega$ og hvis Tykkelse er dr, bliver altsaa

$$= k\,\frac{du}{dr} \,.\, rd\omega \,.\, dt,$$

idet k betegner Legemets Varmeledningsevne, eller den Varmemængde, som i en Tids-Eenhed strømmer igjennem en Eenhed af Overflade paa et Legeme, hvis Tykkelse $= 1$, naar Differentstemperaturen for begge Sider af Legemet $= 1°$. Men betegnes Massens Tæthed og dens specifiske Varme ved ϱ og w, saa vil den Varmemængde, som det betragtede Element af Massen indeholder, være:

$$\varrho w u \,.\, rd\omega \,.\, dr$$

og den Varmemængde, som hele det lille Sector-Element MPM' indeholder, bliver altsaa:

$$\int_0^r (\varrho w u \,.\, r \,.\, d\omega)\, dr.$$

Men denne Varmemængdes Variation i Tiden dt maa naturligviis netop være den forannfundne Varmemængde, som gjennemstrømmer Overfladen $rd\omega$ i samme Tid dt, hvoraf følger:

$$\frac{d\int_0^r (\varrho w u r d\omega)\, dr}{dt}\, dt = k\,\frac{du}{dr} \,.\, rd\omega \,.\, dt,$$

som, idet ϱ, w og k ere constante, netop reducerer sig til Formlen (40).

Det fuldstændige Integral svarende til Differentialligningen (40) kan fremstilles:

$$\left.\begin{aligned}
u = {} & \operatorname{Log} r \,.\, f(t) + F(t) \\
& + \left[\operatorname{Log}\left(\frac{r}{e}\right) \times f'(t) + F'(t)\right]\left(\frac{r}{2M}\right)^2 \\
& + \left[\operatorname{Log}\left(\frac{r}{e\sqrt{e}}\right) \times f''(t) + F''(t)\right]\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2 \\
& + \left[\operatorname{Log}\left(\frac{r}{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}}\right) \times f'''(t) + F'''(t)\right]\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2\left(\frac{r}{6M}\right)^2 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (41)$$

idet e betegner Grundtallet for de naturlige Logarithmer, der er fremstillet ved Log, og $f(t)$ og $F(t)$ betegne tvende arbitrære Functioner af t.

Dette Integral findes, naar vi sætte:

$$u = T \,.\, R + T_1 R_1 + T_2 \,.\, R_2 + \ldots$$

idet $T\ T_1\ T_2\ \ldots$ betragtes som Functioner af t og $R\ R_1\ R_2\ \ldots$ som Functioner af r; thi heraf følger:

$$\frac{du}{dt} = T' \,.\, R + T_1' R_1 + T_2' R_2 + \ldots$$

$$\frac{M^2}{r}\,\frac{d\left(r\frac{du}{dr}\right)}{dr} = T \,.\, \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R'r)}{dr} + T_1 \,.\, \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R_1'r)}{dr} + T_2 \,.\, \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R_2'r)}{dr} \ldots$$

og heraf see vi, at, naar T betragtes som en arbitrær Function af t, saa vil den givne partielle Differentialligning (40) blive tilfredsstillet, naar vi sætte:

$$\left.\begin{aligned}
& \frac{d(R'r)}{dr} = 0 \\
& \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R_1'r)}{dr} = R \text{ og } T_1 = T' \\
& \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R_2'r)}{dr} = R_1 \text{ og } T_2 = T_1' \\
& \frac{M^2}{r}\,\frac{d(R_3'r)}{dr} = R_2 \text{ og } T_3 = T_2' \\
& \text{etc. etc.}
\end{aligned}\right\}$$

hvoraf findes

$$T_1 = T',\ T_2 = T'',\ T_3 = T''',\ T_4 = T'''',\ \ldots$$

$$R = c \operatorname{Log}(ar)$$

$$R_1 = c\left(\frac{r}{2M}\right)^2 \operatorname{Log}\left(\frac{ar}{e}\right) + c_1 \operatorname{Log}(a_1 r)$$

$$R_2 = c\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2 \operatorname{Log}\left(\frac{ar}{e\sqrt{e}}\right) + c_1\left(\frac{r}{2M}\right)^2 \operatorname{Log}\left(\frac{a_1 r}{e}\right) + c_2 \operatorname{Log}(a_2 r)$$

etc. etc.

og naar disse Værdier indsættes, erholdes efter nogen Transformation Formlen (41).

Ved at differentiere Formlen (41) finde vi:

$$\frac{du}{dr}=\frac{1}{r}\left[\begin{array}{l} f(t)+f'(t)\left(\frac{r}{2M}\right)^2+f''(t)\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2+\ldots \\ 2\left(\mathrm{Log}\left(\frac{r}{e}\right).f'(t)+F'(t)\right)\left(\frac{r}{2M}\right)^2+4\left(\mathrm{Log}\left(\frac{r}{e\sqrt{e}}\right)f''(t)+F''(t)\right)\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2+\ldots \end{array}\right] \quad (42)$$

Antage vi nu, at Varmen udstrømmer til alle Sider omkring det Punkt, som svarer til $r = 0$, og at Varmestrømmen ikke udgaaer fra dette Punkt alene, men derimod udgaaer fra alle Legemets Dele, saa maa Varmestrømmen være $= 0$ for $r = 0$. Men skal $\left(\frac{du}{dr}\right)$ være Nul for $r = 0$, saa maa $f(t)$ være Nul, og deraf følger altsaa, at, naar Vandet staaer stille i Ledningen, som ogsaa, naar Vandet bevæger sig med constant Hastighed under permanente Temperaturforhold, saa er $f(t) = 0$ for selve Vandstrømmen, eftersom Forsøgene have viist, at i disse Tilfælde strømmer Varmen uophørlig ud i alle Retninger, lodret paa Vandstrømmens Retning, fra det Element, hvis Temperatur er et Maximum.

Men naar $f(t) = 0$, saa reducere Formlerne (41) og (42) sig til følgende simplere Formler:

$$u = F(t) + F'(t)\,.\left(\frac{r}{2M}\right)^2 + F''(t)\,.\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\left[2\,F'(t)\left(\frac{r}{2M}\right)^2 + 4\,F''(t)\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2 + 6\,F'''(t)\left(\frac{r}{2M}\right)^2\left(\frac{r}{4M}\right)^2\left(\frac{r}{6M}\right)^2 + \ldots\right] \quad (44)$$

For den egentlige Vandledning, der gjennemstrømmes af det varme Vand, som ogsaa, naar Varmen helt og holdent udgaaer fra et Punkt i Massen og derfra udstrømmer imod Ledningens Overflade, er Betingelsen aabenbart den, at $\left(r.\frac{du}{dr}\right)$ skal være uafhængig af r; men denne Betingelse kan kun tilfredsstilles, naar vi i Formlen (42) sætte:

$$f'(t) = f''(t) = f'''(t) = \ldots = 0$$
$$F'(t) = F''(t) = F'''(t) = \ldots = 0,$$

altsaa ved at antage at $f(t)$ og $F(t)$ begge ere constante, og i dette Tilfælde kan Formlen (41) altsaa skrives:

$$u = B \log\left(\frac{A}{r}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

hvor A og B ere constante Størrelser. Det bemærkes dernæst, at, jo større vi tænke os Varmeledningsevnen k at være, desto mere aftager Temperaturforskjelligheden i hvert enkelt Tværsnit, og, naar vi tænke os Varmeledningsevnen at blive uendelig stor, saa maa Temperaturen blive uafhængig af Afstanden r. Dette stemmer ogsaa med Formlen (43), som reducerer sig til:

$$u = F(t)$$

for $k = \infty$, idet vi ifølge (40) samtidig have $M = \infty$. Men hvis Varmeledningsevnen var uendelig stor, saa maatte Temperaturen af Vandet i Henhold til de af mig udførte Forsøg, efter Forløbet af Tiden t være fremstillet ved Formlen:

$$(u - \theta_0) = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t}$$

og deraf kunne vi altsaa slutte, at:

$$F(t) = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t} + \theta_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Som en Følge heraf kunne Formlerne (43) og (44) altsaa fremstilles:

$$\left.\begin{aligned} (u - \theta_0) &= (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t} \,.\, \varphi \text{ og} \\ \left(\frac{du}{dr}\right) &= (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t} \,.\, \frac{d\varphi}{dr} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

idet

$$\varphi = 1 - \frac{\left(\frac{gr}{2M}\right)^2}{1\,.\,1} + \frac{\left(\frac{gr}{2M}\right)^4}{1\,.\,1\,.\,2\,.\,2} = \frac{\left(\frac{gr}{2M}\right)^6}{1\,.\,1\,.\,2\,.\,2\,.\,3\,.\,3} + \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Denne sidste Formel ville vi betragte lidt nærmere.

Sætte vi $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2 = \alpha$, saa erholde vi følgende Rækker for φ og $\frac{d\varphi}{dr} = \varphi'$:

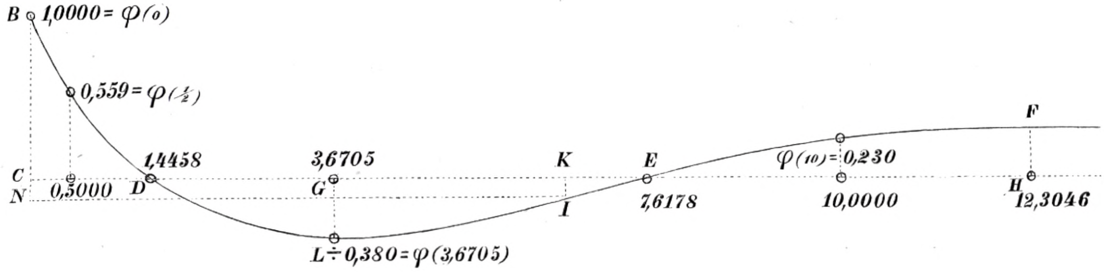
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 1 - \frac{\alpha}{1^2} + \frac{\alpha^2}{(1\,.\,2)^2} - \frac{\alpha^3}{(1\,2\,3)^2} + \frac{\alpha^4}{(1\,2\,3\,4)^2} - \ldots \\ \varphi' &= -\left[1 - \frac{\alpha}{1^2\,.\,2} + \frac{\alpha^2}{(1\,.\,2)^2\,.\,3} - \frac{\alpha^3}{(1\,2\,3)^2\,.\,4} + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

hvorom det er bekjendt fra Ramus Algebra & Functionslære Side 178, at de begge blive Nul for et uendeligt Antal af positive Værdier for α, hvoraf de to mindste Rødder i Ligningen $\varphi = 0$ ere $\alpha = 1{,}4458$ og $\alpha = 7{,}6178$ og de to mindste Rødder i Ligningen $\varphi' = 0$ ere $\alpha = 3{,}6705$ og $\alpha = 12{,}3046$. Da fremdeles, ifølge (49),

$$\alpha\,.\,\varphi'' + \varphi' + \varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

og da alle de Værdier for α, som tilfredsstille Ligningen $\varphi' = 0$, give Maxima og Minima af φ, saa vil en Analyse let vise, at den krumme Linie, hvis Abscisser ere α og hvis Ordinater ere φ, kan fremstilles ved efterstaaende Figur 5, hvori CH er Abscisse-Axen og hvori CB er Ordinat-Axen.

Fig. 5.



Heraf see vi, at den omhandlede Curve er en i det Uendelige udstrakt bølgeformig Linie, som afvexlende ligger over og under Abscisse- eller α Axen. Da Curvens Inflexionspunkter ere bestemte ved $\varphi'' = 0$, saa see vi af Formlen (50) at Inflexionspunkterne svare til de Værdier af α, som tilfredsstille Ligningen $\varphi' + \varphi = 0$, der viser, at Inflexionspunkter paa de nedstigende Dele af Curven stedse ligge over Abscisseaxen og paa de opadstigende Dele af Curven stedse ligge under Abscisseaxen. Det første Inflexionspunkt er Punktet I, og da Betingelsen for Inflexionspunktet er $\varphi' = -\varphi$, saa have vi i dette Punkt $\int \varphi d\alpha = \alpha . \varphi$. Aarealet af Figuren $GLIK$ er følgelig ligestor med Rectanglen $CNIK$. Blandt flere mærkelige Egenskaber, som denne Curve har, skal jeg her blot fremhæve den, at Arealet, som begrændses af en hvilkensomhelst nedstigende Curve, Ordinaterne til Maximums- og Minimumspunktet for denne, samt Abscisseaxen, er Nul, naar vi betragte de Arealer, som ligge under Abscisseaxen, som negative, i Sammenligning med de Arealer, der ligge over Abscisseaxen og betragtes som positive; men paa samme Maade er tillige ethvert Areal, som er begrændset af en opadstigende Curve, Abscisseaxen samt Ordinaterne til Minimumspunktet og det paafølgende Maximumspunkt, stedse lig Nul. For Exempel Arealet BCD = Arealet DGL; $EGL = EFH$; etc. Denne Egenskab udledes let af Formlerne (49), som vise, at:

$$\frac{d(\alpha . \varphi')}{d\alpha} + \varphi = 0,$$

altsaa:

$$\alpha . \varphi' + \int \varphi . d\alpha = C.$$

Det er nemlig let at see, at den arbitrære Constant C er Nul; thi til $\alpha = 0$ er Arealet $\int \varphi d\alpha = 0$, og Ligningen bliver altsaa følgende:

$$\varphi' . \alpha + \int \varphi . d\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

som viser, at Arealet $\int \varphi \, d\alpha = 0$ hvergang $\varphi' = 0$, og dermed er Sætningen beviist.

Efter disse Bemærkninger med Hensyn til Functionen φ ville vi betragte den første Formel (47), og vil det da være indlysende, at, eftersom u aldrig kan blive mindre end θ_0, og φ følgelig ikke kan blive mindre end Nul, saa vil den største Værdi, som $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2$ kan erholde, være = 1,4458. Betegne vi nu i Almindelighed Temperaturen svarende til $r = 0$ efter Forløbet af Tiden t med U, saa have vi ifølge (47):

$$U - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

hvilken Ligning, som sagt, stemmer fuldstændigt med Erfaring. Men indsætte vi dette Udtryk i Formlen (47), saa finde vi:

$$u - \theta_0 = (U - \theta_0) . \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

og naar vi heri indsætte Rækken (48) istedetfor φ, saa finde vi let:

$$(U - u) = \left(\frac{gr}{2M}\right)^2 \left[1 - \frac{\left(\frac{gr}{2M}\right)^2}{(1 . 2)^2} + \frac{\left(\frac{gr}{2M}\right)^4}{(1 . 2 . 3)^2} - \ldots\right](U - \theta_0) \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

Af denne Formel see vi, at, naar $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2$ er meget lille imod 1, saa reducerer den sig til:

$$(U-u) = \left(\frac{gr}{2M}\right)^2 (U-\theta_0) = \frac{g^2 \varrho w}{4} \frac{r^2}{k} (U-\theta_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

der ganske stemmer overeens med Formlen (37), som vi i det Foregaaende have fundet stadfæstet ved Forsøgene; men naar der sees hen til, hvad vi foran have udviklet om Functionen φ, saa vil det være klart, at, medens 1,4458 er den største Værdi som $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2$ kan erholde og navnlig er den Værdi, som $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2$ erholder, naar Legemets Overflade og det omgivende Medium have samme Temperatur, saa vil Værdien af $\left(\frac{gr}{2M}\right)^2$ i Reglen stedse være en ægte Brøk, naar Ledningens Temperatur er væsentligt større end Temperaturen af det omgivende Medium, og Formlen (54) maa følgelig ansees som stemmende med Erfaring saa langt vor Kundskab strække sig.

Naar vi mellem de to Formler (47) borteliminere $(u_0 - \theta_0)e^{-g^2 t}$, saa finde vi:

$$\frac{du}{dr} = (u-\theta_0) \cdot \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\varphi}$$

og indsætte vi dette Udtryk i Formlen (C) erholdes:

$$\Gamma = -k \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\varphi} (u-\theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Betegne vi dernæst Radius til Ledningens ydre Overflade ved R, de dertil svarende Værdier af $\frac{d\varphi}{dr}$ og φ ved $\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]$ og $[\varphi]$ og indsætte vi disse Værdier i Formlen (56), saa vil Γ fremstille den Varmemængde, som i en Tids-Eenhed udstrømmer igjennem en Overflade-Eenhed af Ledningen. Men denne Varmemængde kan ifølge det Foregaaende ogsaa fremstilles ved $h(u-\theta_0)$, idet h betegner Overfladens Varme-Udstraaleevne, og vi erholde derved følgende Relation imellem h og k:

$$\frac{h}{k} = -\frac{\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]}{[\varphi]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

eller, naar Værdierne for $\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]$ og $[\varphi]$ indsættes:

$$h = g^2 \frac{\varrho w R}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\left(\frac{gR}{2M}\right)^2}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{gR}{2M}\right)^4}{(1 \cdot 2)^2 \cdot 3} - \ldots}{1 - \frac{\left(\frac{gR}{2M}\right)^2}{1^2} + \frac{\left(\frac{gR}{2M}\right)^4}{(1 \cdot 2)^2} - \ldots}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

hvilken Værdi i Reglen med Tilnærmelse kan skrives:

$$h = g^2 \cdot \frac{\varrho w \cdot R}{2}, \text{ hvoraf } g^2 = \frac{2h}{\varrho w \cdot R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Indsætte vi denne Værdi for g^2 i Formlen (52), saa finde vi:

$$U - \theta_0 = (u_0 - \theta_0) e^{-\frac{2ht}{\varrho w \cdot R}}$$

som fuldstændig stemmer med Formlen (28), der er stadfæstet ved Forsøg. Med samme Approximation erholde vi ifølge (56):

$$\varGamma = \frac{g^2 \varrho w}{2} \cdot r \cdot (u - \theta_0)$$

eller, naar Værdien for g^2 indsættes ifølge (59):

$$\varGamma = h \cdot \frac{r}{R} (u - \theta_0), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

som viser, at Varmestrømmen i det Indre af Cylindren staaer i et simpelt Forhold til den ved Overfladen.

Vi kunne anvende Formlerne (52) og (55) samt Forsøgene Nr. 24—30 paa at bestemme Vandets Varmeledningsevne k, idet vi betragte de observerede Temperaturer i Maalerøret, som identiske med de tilsvarende Temperaturer af Vandet, hvilket dog næppe er ganske rigtigt. Det bemærkes da først, at vi i det Foregaaende ved Hjælp af Forsøgene Nr. 24 og 25 for den 4 Tom. Ledning have fundet:

$$\log (u_0 - \theta_0) = \log (U - \theta_0) + 0{,}000885 \cdot x$$

og for en 6 Tom. Ledning af det Tværsnit, som Røret GH Fig. 2 havde, vilde vi for samme Vandføring, i Henhold til Formlen (22), have:

$$\log (u_0 - \theta_0) = \log (U - \theta_0) + 0{,}00112 \cdot x.$$

Men da den af Vandet i Tiden t gjennemløbne Vei $x = V \cdot t$, idet $V = \frac{4}{\pi} \frac{Q}{d^2} = \frac{4}{\pi} \frac{0{,}0066}{\frac{1}{4}} = 0{,}0336$, saa finde vi:

$$\log (u_0 - \theta_0) = \log (U - \theta_0) + 0{,}0000376 \cdot t.$$

Multiplicere vi denne Ligning med Modulus 2,302585 . . ., saa finde vi let:

$$U - \theta_0 = (u_0 - \theta_0) e^{-0{,}00008658 \cdot t},$$

som sammenlignet med Formlen (52) viser, at:

$$g^2 = 0{,}00008658.$$

Sammenholde vi dernæst Formlen (36), som, naar vi istedetfor 1 Tomme tage 1 Fod som Eenhed, kan skrives:

$$r^2 = 0{,}016 \, (114{,}47 - u)$$

med Formlen (55), saa finde vi, naar vi i sidstnævnte Formel sætte $U = 114{,}47°$, og derhos for Vandet sætte $\varrho = 1$ og $w = 1$, samt i Henhold til Forsøgene sætte $\theta_0 = 0{,}9°$,

$$\frac{k}{g^2} = 0{,}455$$

og deraf følger Vandets Varmeledningsevne:

$$k = 0{,}0000394,$$

som her, hvor Længde-Eenheden er 1 Fod, er udtrykt i Cubikfod Vand opvarmet 1° C.

Den Varmemængde, som ved en Temperaturdifferents af 1° C. pr. Minut og pr. □ Fod Overflade strømmer igjennem et Vandlag af 1 Fods Tykkelse, kan altsaa udtrykkes i Pund Vand opvarmet 1° ved:

$$k = 0{,}0000394 \times 62 \times 60 = 0{,}1465 \text{ Varme-Eenheder.}$$

Til Sammenligning skal jeg tilføie de af Ångström angivne Værdier for Varmeledningsevnen af Kobber, Jern og Sand, hvilke Værdier jeg ved at multiplicere med 0,0629 har reduceret til samme Eenhed som ovenfor, og hvorved jeg finder:

for Kobber $k = 3{,}435$ Varme-Eenheder
for Jern $k = 0{,}614$ —
og for Sand $k = 0{,}0129$ —

I det Foregaaende have vi betragtet Varmeforholdene i en Cylinder, som er udsat for Afkjøling af det omgivende Medium og navnlig af Luft. I det Følgende ville vi undersøge Varmeforholdene i en Kugle, som paa lignende Maade er omgivet af et Medium af en lavere Varmegrad. Kuglens Centrum være Coordinaternes Begyndelsespunkt og Ligningen for en vilkaarlig Kugleoverflade, der er concentrisk med den givne, være:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Antages denne Kugleflade at være homogen samt at Afkjølingen er ligestor i alle Punkter af dens Overflade, saa vil Temperaturen u af det vilkaarlige Punkt, hvis Coordinater ere x, y og z, kun afhænge af r og Tiden t. Men Poisson har viist, at i dette Tilfælde kan Formlen (A) fremstilles:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{M^2}{r^2} \cdot \frac{d\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)}{dr} \\ M^2 &= \frac{k}{\varrho w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Det fuldstændige Integral af denne Differentialligning kunne vi ligesom tidligere tænke os fremstillet ved følgende Række:

$$u = R \cdot T + R_1 T_1 + R_2 T_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

hvor R, R_1, $R_2 \ldots$ alene ere Functioner af r

og T, T_1, $T_2 \ldots$ alene ere Functioner af t.

Af (63) finde vi nu: $$\frac{du}{dt} = RT' + R_1 T_1' + R_2 T_2' + \ldots$$

og $$\frac{M^2}{r^2} \frac{d\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)}{dr} = \frac{M^2}{r^2} \frac{d(r^2 R')}{dr} \cdot T + \frac{M^2}{r^2} \frac{d(r^2 R_1')}{dr} \cdot T_1 + \ldots$$

Betragte vi dernæst T som en arbitrær Function af t, saa er det klart, at Formlen (62) vil blive tilfredsstillet naar vi sætte:

$$\frac{d(r^2R')}{dr} = 0,\ \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2R_1')}{dr} = R,\ \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2R_2')}{dr} = R_1 \dots$$

samt:
$$M^2T_1 = T',\ M^2T_2 = T_1',\ M^2T_3 = T_2',\ \dots$$

Heraf finde vi:

$$R = a_0 + \frac{a_1}{r},\ R_1 = \frac{a_0}{1.2.3}r^2 + \frac{a_1}{1.2}r + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{r}$$

$$R_2 = \frac{a_0}{1.2.3.4.5}r^4 + \frac{a_1}{1.2.3.4}r^3 + \frac{a_2}{1.2.3}r^2 + \frac{a_3}{1.2}r + \frac{a_4}{1} + \frac{a_5}{r}$$

$$R_3 = \frac{a_0}{1.2\dots7}r^6 + \frac{a_1}{1.2\dots6}r^5 + \frac{a_2}{1.2\dots5}r^4 + \frac{a_3}{1.2.3.4}r^3 + \dots \frac{a_6}{1} + \frac{a_7}{r}$$

o. s. v.

samt:
$$T_1 = \frac{T'}{M^2},\ T_2 = \frac{T''}{(M^2)^2},\ T_3 = \frac{T'''}{(M^2)^3},\ \dots$$

Indsætte vi disse Værdier for R, R_1, $R_2 \dots$ tillige med dem for T_1, T_2, $T_3 \dots$ i Formlen (63), saa finde vi efter nogen Omskrivning, idet $f(t)$ og $F(t)$ betegne tvende arbitrære Functioner af Tiden:

$$\left.\begin{aligned} r.u &= f(t) + f'(t).\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^2}{1.2} + f''(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^4}{1.2.3.4} + \dots \\ &+ MF(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)}{1} + MF'(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^3}{1.2.3} + MF''(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (64)$$

der, som bekjendt, er Integralet af Ligningen:

$$M^2.\frac{d^2(ru)}{dr^2} = \frac{d(ru)}{dt}, \dots\dots\dots\dots (65)$$

som ogsaa let viser sig at være identisk med (62).

Af Formlen (64), der kan skrives:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{r}f(t) + f'(t).\frac{\frac{r}{M^2}}{1.2} + f''(t)\frac{\frac{r^3}{M^4}}{1.2.3.4} + \dots \\ &+ F(t) + F'(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^2}{1.2.3} + F''(t)\frac{\left(\frac{r}{M}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \dots \end{aligned}\right\},$$

finde vi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{1}{r^2}f(t) + f'(t)\frac{\frac{1}{M^2}}{1.2} + f''(t)\frac{\frac{3r^2}{M^4}}{1.2.3.4} + \dots \\ &+ F'(t)\frac{\frac{2r}{M^2}}{1.2.3} + F''(t)\frac{\frac{4r^3}{M^4}}{1.2.3.4.5} + \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (66)$$

Det vil atter her være hensigtsmæssigt at skjelne imellem følgende 2de Tilfælde:

1. Det Tilfælde, hvor hele Varmestrømmen udgaaer fra Kuglens Centrum eller fra en indre Kugleflade som er concentrisk med den givne og hvis Temperatur er lige i alle Punkter; og dernæst:
2. Det Tilfælde, hvor Varmen udstrømmer fra alle Punkter i Kuglen, som derved efterhaanden afgiver sin Varme til det omgivende Medium.

I første Tilfælde vil Varmestrømmen i Kuglens forskjellige Punkter naturligviis forholde sig omvendt som Qvadratet af Afstanden til Centrum, saa at $\left(r^2 . \frac{du}{dr}\right)$ bliver uafhængig af r. For at dette kan finde Sted, maae vi i Henhold til (66) have:

$$f'(t) = 0, \quad f''(t) = 0, \quad f'''(t) = 0 \ldots . \text{ og}$$
$$F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0, \quad F'''(t) = 0 \ldots .,$$

følgelig $f(t) = A$ og $F(t) = B$, idet A og B ere constante, hvorved Formlen (64) reducerer sig til følgende simple Formel:

$$r(u - B) = A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67)$$

Kan man altsaa bestemme u for tvende Værdier af r, saa kan man deraf finde A og B og dermed Temperaturen i et hvilketsomhelst Punkt af Massen.

I andet Tilfælde maae vi nødvendigviis have $\frac{du}{dr} = 0$ for $r = 0$, efterdi Varmen rundt om Centrum strømmer ud i alle Retninger. Men for at dette skal kunne finde Sted, maae vi ifølge (66) have $f(t) = 0$, og derved reducerer Formlerne (64) og (66) sig til følgende:

$$u = F(t) + F'(t) \frac{\left(\frac{r}{M}\right)^2}{1.2.3} + F''(t) \frac{\left(\frac{r}{M}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots . \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \left[2 F'(t) \frac{\left(\frac{r}{M}\right)^2}{1.2.3} + 4 F''(t) \frac{\left(\frac{r}{M}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots . \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

Det bemærkes her, ligesom forhen med Hensyn paa Rørledningen, at, jo større vi tænke os Varmeledningsevnen k at være, desto mere aftager Temperaturforskjellen i de forskjellige Punkter af Kuglen, samt at Temperaturen maa blive uafhængig af r, naar k bliver uendelig stor. Dette stemmer ganske med Formlen (68); thi naar vi antage $k = \infty$, saa vil ogsaa $M^2 = \frac{k}{\varrho w}$ blive uendelig, og da reducerer Formlen (68) sig til

$$u = F(t).$$

Men naar Temperaturen til enhver Tid t er ligestor for alle Punkter af Kuglen, saa er det klart af de tidligere anførte Forsøg, idet vi betegne den omgivende Lufts Temperatur ved θ_0, Kuglens oprindelige Temperatur ved u_0 og dens Temperatur efter Tiden t ved u, at:

$$u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t}$$

hvor g^2 er en Constant, og deraf kunne vi altsaa slutte, at:

$$\left.\begin{array}{c} F(t) = \theta_0 + (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t} \\ F'(t) = -g^2 (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t}, \; F''(t) = g^4 (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t}, \\ F'''(t) = -g^6 (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t} \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

Indsætte vi disse Værdier i Formlerne (68) og (69) saa finde vi:

$$\left.\begin{array}{c} u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t} . \psi \text{ og} \\ \dfrac{du}{dr} = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t} . \dfrac{d\psi}{dr}, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

naar vi for Kortheds Skyld sætte:

$$\psi = 1 - \frac{\left(\frac{gr}{M}\right)^2}{1 . 2 . 3} + \frac{\left(\frac{gr}{M}\right)^4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} - \frac{\left(\frac{gr}{M}\right)^6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} + \ldots;$$

men da denne Række kan fremstilles under endelig Form ved:

$$\psi = \frac{\sin\left(\frac{gr}{M}\right)}{\left(\frac{gr}{M}\right)},$$

saa kunne Formlerne for Varmens Bevægelse i Kuglen altsaa skrives:

$$\left.\begin{array}{c} u - \theta_0 = (u_0 - \theta_0) \dfrac{\sin\left(\frac{gr}{M}\right)}{\left(\frac{gr}{M}\right)} . e^{-g^2 . t} \\ \Gamma = (u_0 - \theta_0)\, k . \dfrac{\sin\left(\frac{gr}{M}\right) - \left(\frac{gr}{M}\right) \cos\left(\frac{gr}{M}\right)}{\left(\frac{gr}{M}\right) . r} e^{-g^2 . t} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Betegne vi nu i Almindelighed Temperaturen svarende til $r = 0$, efter Forløbet af Tiden t, ved U, saa finde vi ifølge (72):

$$U - \theta_0 = (u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

og indsætte vi denne Værdi for $(u_0 - \theta_0)e^{-g^2 . t}$ samt $\sqrt{\dfrac{k}{\varrho w}}$ istedetfor M i Formlerne (72), saa erholde vi Temperaturforholdet:

$$\frac{u - \theta_0}{U - \theta_0} = \frac{\sin\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} . r\right)}{\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} . r\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

samt Varmestrømmen fremstillet ved:

$$\Gamma = \left[\frac{k}{r} - g\sqrt{\varrho w . k} \cot\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} . r\right)\right](u - \theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Naar vi i dette sidste Udtryk for r indsætte Radius til Kuglens ydre Overflade, hvilken vi ville betegne med R, saa vil Γ fremstille den Varmemængde, som i en Tids-Eenhed udstrømmer igjennem en Eenhed af denne Overflade og deraf følger, at Varme-udstrømningsevnen, naar denne betegnes ved h, kan fremstilles ved:

$$h = \frac{k}{R} - g\sqrt{\varrho w \, . \, k} \, . \cot\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Ovenstaaende Formler (73) og (74) fremstille Temperaturens Aftagelse og Fordeling i en Kugle, hvori Temperaturforholdene befinde sig i en naturlig Tilstand; men da $(u - \theta_0)$ aldrig kan blive negativ, hvor stor vi end gjøre r, saa maa $g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R$ være $\overline{\overline{<}}\, \pi$ og, som en Følge heraf, maa vi stedse kunne sætte:

$$g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R = \varepsilon \, . \, \pi,$$

idet ε er en positiv ægte Brøk.

Multiplicere vi $(u - \theta_0)$ med $4\pi\varrho w r^2 dr$ og integrere dette Udtryk fra $r = 0$ til $r = R$, saa erholde vi den hele Varmemængde, som Kuglen indeholder ved Enden af Tiden t. Udføres denne Integration, idet vi for $(u - \theta_0)$ indsætte dens Værdi ifølge (74) samt med w betegne denne Varmemængde, saa finde vi:

$$\mathrm{w} = \frac{4\pi(U - \theta_0)}{g^2} \, kR \, . \, \frac{\sin\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right) - \left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right) \cos\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right)}{\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right)} \quad . \; . \quad (77)$$

Naar vi heri for $\dfrac{U - \theta_0}{g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R}$ indsætte $\dfrac{\Theta - \theta_0}{\sin\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right)}$, idet Temperaturen ved Kuglens Overflade betegnes ved Θ, saa finde vi let:

$$\mathrm{w} = \frac{4\pi R^2}{g^2}\left[\frac{k}{R} - g\sqrt{\varrho w \, . \, k} \, . \cot\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}} \, . \, R\right)\right](\Theta - \theta_0), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

som sammenlignet med Formlen (75) viser, at, naar Varmestrømmen ved Overfladen betegnes ved Γ_1, saa er:

$$\frac{\Gamma_1}{\mathrm{w}} = \frac{g^2}{4\pi R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

hvoraf fremgaaer, at der stedse finder et constant Forhold Sted imellem den Varmemængde, som udstrømmer igjennem Kuglens Overflade i en Tids-Eenhed, og det hele Overskud af Varme, som Kuglen til enhver Tid indeholder, samt at dette Forhold netop er:

$$\frac{4\pi R^2 \, . \, \Gamma_1}{\mathrm{w}} = g^2.$$

Af Formlen (74) see vi, at Temperaturen $(u - \theta_0)$ af et hvilketsomhelst Punkt i Kuglen, hvis Afstand fra Centrum er r, uafhængigt af Afkjølingstiden t, staaer i et constant Forhold til Temperaturen i Centrum $(U - \theta_0)$, og heraf fremgaaer, at, naar Kuglens Temperaturforhold befinde sig i naturlig Tilstand, saa vil Temperaturen aftage i samme Forhold i alle Punkter af Kuglen. Anderledes vil det derimod forholde sig, naar Kuglen pludselig bringes ud af de Omgivelser, hvori Temperaturen befinder sig i en naturlig Tilstand, og føres ind under andre Forhold, som betinge en anden Fordeling af Varmen i samme.

Antage vi f. Ex., at Kuglen er opvarmet i et Bad til en eensformig Temperatur $(\Theta - \theta_0)$ igjennem hele Massen, saa vil den Varmemængde, som Kuglen indeholder, være

$$W = \tfrac{4}{3}\pi\varrho w\,(\Theta - \theta_0)\,R^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Tage vi da denne Kugle og bringe den ind i det afkjølende Medium, hvis Temperatur er θ_0, saa vil Varmetabet, som Kuglen lider i første Øieblik, være ligestort med det Tab, den vilde lide, hvis Varmefordelingen havde været naturlig for de nye Forhold, og Temperaturoverskuddet ved Overfladen havde været $= (\Theta - \theta_0)$. Deraf fremgaaer altsaa, at i første Øieblik vil Varmetabet for Kuglen være af samme Størrelse som om Temperaturen i Centrum var:

$$(U - \theta_0) = \frac{g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R}{\sin\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)}\,(\Theta - \theta_0)$$

og som om den indeholdte Varmemængde havde været:

$$\mathrm{w} = \frac{4\pi R^2}{g^2}\left[\frac{k}{R} - g\sqrt{\varrho w\,.\,k}\,.\,\cot\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)\right](\Theta - \theta_0).$$

Sammenligne vi dette Udtryk med Formlen (80), saa finde vi:

$$\frac{\mathrm{w}}{W} = n, \text{ idet } n = \frac{3}{\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)^2}\left[1 - \left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)\cot\left(g\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)\right] \quad \ldots \quad (81)$$

Men hvis den Varmemængde, som udstrømmer af Kuglens Overflade i en Tids-Enhed, naar den i Kuglen indeholdte Varmemængde er lig w, betegnes ved $4\pi R^2 \Gamma_1$ og den Varmemængde, som udstrømmer igjennem samme Overflade, naar den i Kuglen indeholdte Varmemængde er lig W, betegnes ved $4\pi R^2\,.\,\Gamma_2$, saa have vi ifølge (79),

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\mathrm{w}}{W} = n,$$

og heraf fremgaaer, at under den kunstige Tilstand, hvori Varmen befinder sig, naar Kuglen fra det varme Bad føres ud i den afkjølende Luft, vil der i første Øieblik i en Tids-Eenhed udstrømme en Varmemængde, som er n Gange saa stor, som den, der udstrømmer, naar Kuglen, indeholdende samme Varmemængde, befinder sig i den til Afkjølingsforholdene svarende naturlige Tilstand, idet n, der bestemmes ved Formlen (81), varierer fra 1 til ∞, naar $\left(\sqrt{\frac{\varrho w}{k}}\,.\,R\right)$ varierer fra 0 til π.

Disse Betragtninger vise, at, naar den Newtonske Lov er rigtig, maatte Dulongs og Petits Forsøg vise en tilsyneladende Afvigelse fra den Newtonske Lov i den Retning, som virkelig ved Forsøgene fremtræder.